

Sokszínű matematika 9.

A KITŰZÖTT FELADATOK EREDMÉNYE

Összeállította:
FRÖHLICH LAJOS
gimnáziumi tanár

A Kombinatorika, halmazok
c. fejezetet szakmailag ellenőrizte:
DR. HAJNAL PÉTER
egyetemi docens

Tartalom

Kombinatorika, halmazok	4
Algebra és számelmélet	12
Függvények	20
Háromszögek, négyszögek, sokszögek	37
Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	43
Egybevágósági transzformációk	52
Statisztika	63



Kombinatorika, halmazok

1. Számoljuk össze

1. $5! = 120$.

2. a) $3! = 6$;

b) $4! = 24$;

c) $5! = 120$;

d) $6! = 720$;

e) $7! = 5040$.

3. a) $4!$;

b) ez nem lehet;

c) 2 ;

d) $4 \cdot 2 = 8$.

4. 6894 számjegyet (10 db 1 jegyű, 90 db 2 jegyű, 900 db 3 jegyű, 1001 db 4 jegyű).

5. Ez 1000 db szám, és minden 10-edik 1-re végződik, így 100 db. A második helyi értéken $10 \cdot 10$ db, a harmadikon 100 db van. Összesen 300 db.

6. a) 23 db 3-as $\rightarrow$ 129-ig;

b) 82 db 3-as $\rightarrow$ 319-ig;

c) 181 db 3-as $\rightarrow$ 412-ig.

7. a) $4^4 = 256$;

b) 96;

c) 64;

d) 32.

8. 6741.

9. a) Ha a testeket elmozdíthatjuk, akkor kevesebb vágással is megoldhatjuk a feladatot. Két egyirányú vágással elérhetjük, hogy egy $5 \times 5 \times 1$ és két $5 \times 5 \times 2$ méretű téglatesthez jussunk. Egyetlen vágással meg tudjuk felezni a két nagyobb testet (és így öt darab $5 \times 5 \times 1$ méretű téglatesthez jutunk), ha a felezendő testeket a megfelelő módon átrendezzük. Így 3 vágással elérjük, amit előbb 4-gyel tettünk meg. Összesen $3 + 3 + 3 = 9$ vágással boldogulunk.

Kevesebb vágás nem elég. Egy vágás után a nagyobb test tartalmaz egy $5 \times 5 \times 3$ -as téglatestet. Ezt a részt kövessük és az átrendezéseinket mindig úgy végezzük el, hogy a követett test ne mozduljon (ezt megtethetjük). A követett test mindig a nagyobbik maradék lesz. Az egyes vágás által érintett oldalakra adható alsó becslés $5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ módon változik. Azaz valóban minden irányban legalább három vágásra szükség is van.

b) $4 + 5 \cdot 4 + 25 \cdot 4 = 124$ vágásra.

Másképpen: Minden vágás eggyel több testet ad. 125 darab kis kockához 124 vágás vezet el.

c) $3^3 = 27$, melynek nincs; $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$, melynek 1; $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ melynek 2 és 8 olyan, melynek 3 piros lapja van. 4, 5, 6 piros lapot tartalmazó kis kocka nincs.

10. a) 7 különböző testet.

11. a) 1;

b) 2;

c) 2;

d) 2.

12. Ákos 6 párnál nyer, Zsombor 23 párnál.

13. Gabi 15-féleképpen és Zsuzsi 21-féleképpen.

14. Kati 16-féleképpen, Dani 20-féleképpen.

15. Zsófi 15-féleképpen, Dorka 21-féleképpen.



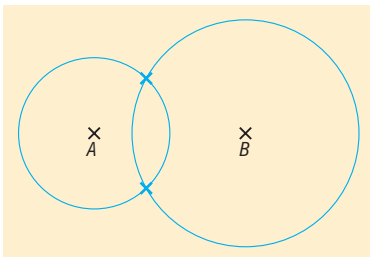
16. Tibi 20-féleképpen, Pisti 16-féleképpen.
17. Egyik nyer, ha a dobott számok összege 7-nél kisebb, a másik, ha nagyobb, és döntetlen, ha 7.
18. e : azon napok, amikor délelőtt esett, u : amikor délután, n : amikor nem esett.
Így $e + n = 12$, $u + n = 9$, $e + u = 11$. Innen $e = 7$, $n = 5$, $u = 4$. 5 napon nem volt eső.

Rejtvény: $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ négyzetet.

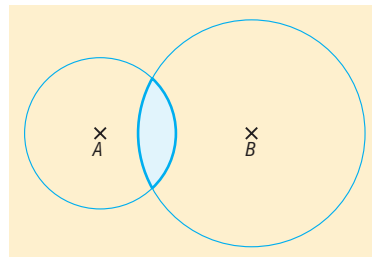
2. Halmazok

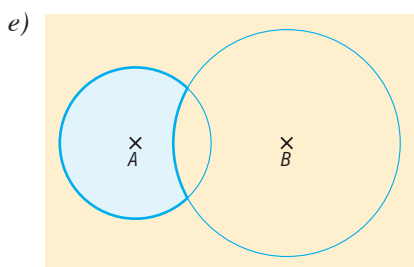
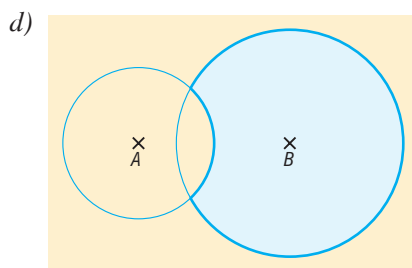
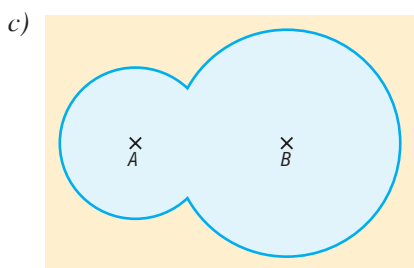
1. a) {január, március, május, július, október, december};
b) $\emptyset$;
c) {január, február, március, április, szeptember, október, november, december};
d) {kedd, szerda, péntek};
e) {Budapest, Győr, Pécs, Debrecen, Szeged}.
2. a) {cs, dz, sz, zs, ty, ly, gy, ny};
b) {Duna};
c) {Európa, Ázsia, Afrika, Ausztrális, Amerika, Antarktisz};
d) {80};
e) $\emptyset$.
3. a) igaz; b) hamis; c) igaz; d) hamis; e) igaz; f) hamis.
4. a) igaz; b) igaz; c) igaz; d) igaz; e) hamis.
5. a) $\emptyset$ {3} {3; 5}
 {5}
b) $\emptyset$ {a} {a, b} {b, c} {a, b, c} {a, b, c, d}
 {b} {a, c} {b, d} {a, b, d}
 {c} {a, d} {c, d} {b, c, d}
 {d} {a, c, d}
c) $\emptyset$ {●} {●, ■} {●, ■, ▲}
 {■} {●, ▲}
 {▲} {■, ▲}
d) Legyen ♣ = a, ♦ = b, ♥ = c, ♠ = d; és lásd a b) részt.
6. a) hamis; b) igaz; c) igaz; d) igaz; e) hamis; f) hamis.

7. a)



b)





8. $2^5 - 1 = 31$ féle összeget, a legnagyobb 185 Ft.

9. a) igaz; b) hamis; c) igaz; d) igaz; e) igaz; f) hamis.

3. Halmazműveletek

1. a) $\bar{A} = \{1; 3; 5; 7; 9; 10\}$
 $\bar{B} = \{2; 5; 8; 9; 10\}$
 $A \cap B = \{4; 6\}$
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$
- b) $\bar{A} = \{d; e; f\}$
 $\bar{B} = \{a; b; c\}$
 $A \cap B = \emptyset$
 $A \cup B = U$
- c) $\bar{A} = \{á; é; í; ó; ú; ü; ű\}$
 $\bar{B} = \{a; á; é; i; í; ó; ú; ü; ű\}$
 $A \cap B = \{e; o; u\}$
 $A \cup B = A$
- d) $\bar{A} = \{k; o; r\}$
 $\bar{B} = \{p; e; n; o; r\}$
 $A \cap B = \{é; s; z\}$
 $A \cup B = \{p; e; n; é; s; z; k\}$
- e) $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11; \dots; 14; 16; \dots\}$
 $\bar{B} = \{1; \dots; 9; 11; \dots; 19; 21; \dots; 29; \dots\}$
 $A \cap B = B$
 $A \cup B = A$
- f) $\bar{A} = B$
 $\bar{B} = A$
 $A \cap B = \emptyset$
 $A \cup B = U$

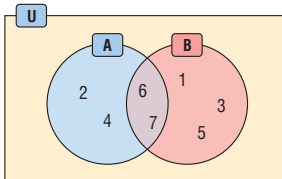


- g) $\bar{A} = \{6\text{-tal nem osztható számok}\}$
 $\bar{B} = \{4\text{-gyel nem osztható számok}\}$
 $A \cap B = \{12\text{-vel osztható számok}\}$
 $A \cup B = \{6\text{-tal vagy } 4\text{-gyel osztható számok}\}$
- h) $\bar{A} = \{15\text{-tel nem osztható számok}\}$
 $\bar{B} = \{6\text{-tal nem osztható számok}\}$
 $A \cap B = \{30\text{-cal osztható számok}\}$
 $A \cup B = \{15\text{-tel vagy } 6\text{-tal osztható számok}\}$
- i) $\bar{A} = \{\text{olyan paralelogrammák, melyekben nincs derékszög}\}$
 $\bar{B} = \{\text{olyan paralelogrammák, melyeknek van különböző hosszú oldala}\}$
 $A \cap B = \{\text{négyszetek}\}$
 $A \cup B = \{\text{olyan paralelogrammák, melyeknek oldaluk vagy szögük egyenlő}\}$
- j) $\bar{A} = \{\text{olyan négyszög, melyben nincs két-két szomszédos egyenlő oldal}\}$
 $\bar{B} = \{\text{olyan négyszög, melyben az átlók nem felezik egymást}\}$
 $A \cap B = \{\text{rombuszok}\}$
 $A \cup B = \{\text{két-két oldaluk egyenlő}\}$
- k) $\bar{A} = B$
 $\bar{B} = A$
 $A \cap B = \emptyset$
 $A \cup B = U$
- l) $\bar{A} = B$
 $\bar{B} = A$
 $A \cap B = \emptyset$
 $A \cup B = U$
- m) $\bar{A} = \{\text{nem pozitív számok}\}$
 $\bar{B} = \{\text{nem negatív számok}\}$
 $A \cap B = \emptyset$
 $A \cup B = U \setminus \{0\}$
- n) $\bar{A} = \{\text{negatív számok}\}$
 $\bar{B} = \{\text{pozitív számok}\}$
 $A \cap B = \{0\}$
 $A \cup B = U$

2. a) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ és } n > 15\}$;

b) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ és } n < 30\}$.

3.



a) $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$

d) $\bar{A} \cap B = \bar{A}$

g) $A \cap \bar{B} = \bar{B}$

j) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

m) $A \setminus \bar{B} = \{6; 7\}$

p) $A \cup U = U$

b) $\bar{B} = \{2; 4\}$

e) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

h) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$

k) $A \setminus B = \bar{B}$

n) $\bar{A} \setminus \bar{B} = \bar{A}$

q) $B \cap U = B$

c) $\bar{A} \cup B = B$

f) $A \cup \bar{B} = A$

i) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

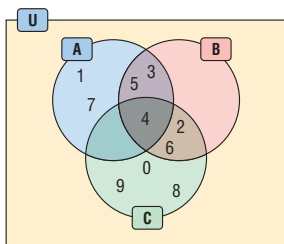
l) $\bar{A} \setminus B = \emptyset$

o) $\overline{A \setminus B} = B$

r) $A \setminus U = \emptyset$



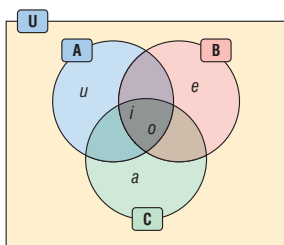
4.



- a) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{0; 8; 9\}$
 c) $A \cap B = \{0; 1; 2; 6; 7; 8; 9\}$
 e) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$
 g) $A \cap \bar{B} = \{1; 7\}$
 i) $B \cap C = \{2; 4; 6\}$
 k) $(A \cap B) \cup C = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$
 m) $(\bar{A} \cap B) \cup C = C$
 o) $\overline{A \cup B} \cap \bar{C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \emptyset$

- b) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{2; 6\}$
 d) $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 f) $A \cup \bar{B} = \{0; 1; 3; 4; 5; 7; 8; 9\}$
 h) $A \cup C = U$
 j) $\bar{B} \cup C = \{0; 1; 2; 4; 6; 7; 8; 9\}$
 l) $(A \cup B) \cap C = \{2; 4; 6\}$
 n) $(\bar{A} \cup B) \cap \bar{C} = \{3; 5\}$
 p) $\emptyset$

5.



- a) hamis
 d) hamis
 g) igaz

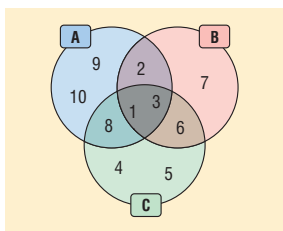
- b) hamis
 e) igaz
 h) igaz

- c) igaz
 f) hamis

6.

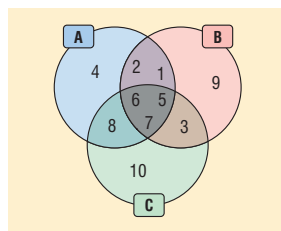
- a) $A = \{5; 8; 9; 10\}$
 $B = \{5; 6; 7\}$
 b) $A = \{7\}$
 $B = \{5; 6; 8; 9; 10\}$

7. a)



- $A = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$
 $B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$
 $C = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$

b)



- $A = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8\}$
 $B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 9\}$
 $C = \{3; 5; 6; 7; 8; 10\}$

10.

- a) igaz
 c) nem szükségszerűen igaz

b)

- b) nem szükségszerűen igaz
 d) igaz

11.

- a) nem igaz
 b) nem igaz

c)

- c) igaz
 d) igaz

12.

- a) nem szükségszerűen igaz
 b) igaz

- c) nem szükségszerűen igaz



13. a) 12 cm^2 , a sárga és a kék terület ugyanakkora, hisz a metszettel kiegészítve ugyanakkora négyzetet adnak.
b) 4 cm^2 , a különbség 0 cm^2 .

Rejtvény: Nincs hiba, mindkét állítás lehet igaz egyszerre, mivel nem állítja, hogy két nyelvet nem tanulhat valaki.

4. Halmazok elemszáma, logikai szita

1. a) 20 b) 12 c) 8
2. a) 45 b) 14 c) 9
3. a) 41 b) 13 c) 95 d) 64
4. 51 lépcsőfokot használnak pontosan ketten.
5. a) 33 b) 26 c) 22 d) 25
6. $0,8 \cdot 15 = 12$ tanuló matematika szakkörre és kosarazni is jár. $12 / 0,3 = 40$ tanuló kosarazik.
7. Az első és a második problémát legalább $90 + 80 - 100 = 70$ tanuló oldotta meg. A harmadik és negyedik problémát legalább $70 + 60 - 100 = 30$ tanuló. Mivel ennek a két halmaznak nem lehet közös eleme, pontosan ennyi az elemszámuk. Tehát 30 tanuló nyert díjat.
8. Barna szemű és sötét hajú tanuló legalább $14 + 15 - 20 = 9$ van. 50 kg-nál nehezebb és 160 cm-nél magasabb pedig $17 + 18 - 20 = 15$. Ezen két halmaz metszetében, azaz akik mind a négy tulajdonsággal rendelkeznek, legalább $15 + 9 - 20 = 4$ tanuló van.
9. Mivel 2 jeles tanuló, sportoló lány van a 10 sportoló lány között, a 6 nem jeles lány közül 8-nak kellene sportolnia, ami lehetetlen.
10. Akkor oldható meg, ha egyetlen férj sem azonos magasságú, illetve súlyú a feleségével. Legyen x a feleségüknél magasabb férjek száma. Így $\frac{2}{3}x$ a magasabb és nehezebb, $\frac{1}{3}x$ a magasabb és könnyebb és $\frac{2}{9}x$ az alacsonyabb és nehezebb férjek száma. Tehát

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x + 120 = 1000.$$

Innen $x = 720$.

480 férj nehezebb és magasabb, mint a felesége.

11. $A = \{1; 2; 3\}$ Megfelelő öt halmaz: $A = \{1; 2; 3; 4\}$
 $B = \{3; 4; 5\}$ $B = \{1; 5; 6; 7\}$
 $C = \{5; 2; 6\}$ $C = \{2; 7; 8; 9\}$
 $D = \{1; 4; 6\}$ $D = \{3; 6; 9; 10\}$
 $E = \{4; 5; 8; 10\}$

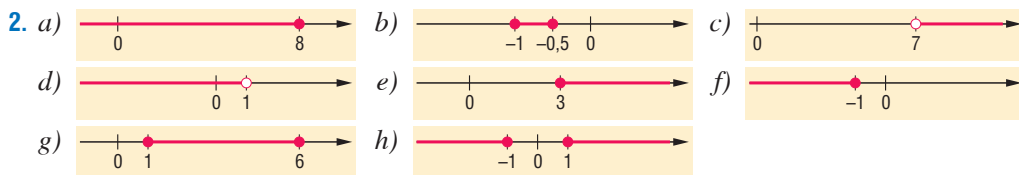
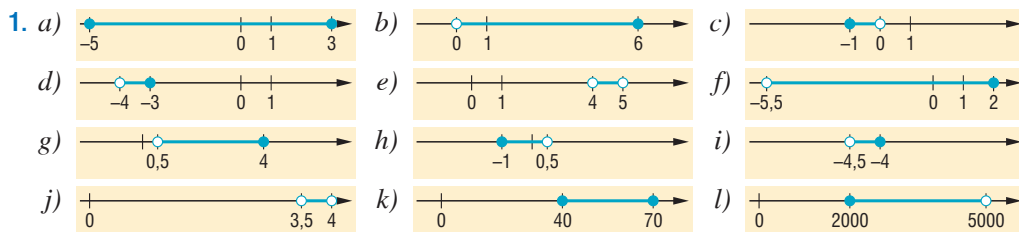
Öt darab 3 elemű halmaz nem adható meg.



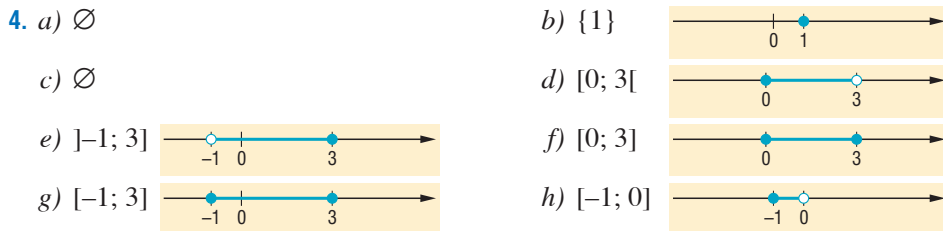
12. $A = \{3n \text{ vagy } 3n + 1 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$
 $B = \{3n + 1 \text{ vagy } 3n + 2 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$
 $C = \{3n \text{ vagy } 3n + 2 \text{ alakú számok, } n \in \mathbb{N}\}$

Rejtvény: H, E, A, B, C, F, Y, G, D a sorrend.

5. Számegyenesek, intervallumok



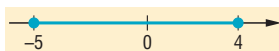
3. a) $[-4; 6[$ b) $] -6; 0]$ c) $[0; 8]$ d) $] -2; 3[$ e) $] 3; 6]$



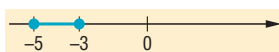
5. a) $] 3; 5[$
b) $] -6; -4[\cup] -2; 2[\cup] 4; 6[$
c) $] -6; -3[\cup] -3; -1[\cup] 1; 3[\cup] 3; 6[$



7. $A \cap B = [-5; 4]$



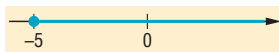
$$B \cap E = [-5; -3]$$



$$C \cap F = \emptyset$$

$$A \cap F = \emptyset$$

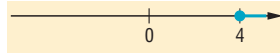
$$B \cup C = [-5; \infty[$$





$$E \cap D = \emptyset$$

$$A \cap C \cap D = [4; \infty[$$



$$B \cap F \cap C = \emptyset$$

8. a) igaz b) hamis c) hamis d) igaz e) igaz f) igaz

Rejtvény: Például: $8 \cdot 8 \cdot (8 + 8) - (8 + 8 + 8)$.



Algebra és számelmélet

1. Betűk használata a matematikában

1. a) 5-tel osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok.
b) 5-tel osztva 2 maradékot adó pozitív egész számok.
c) Racionális számok.

2. Racionális számok.

3. $4m + 1$; $m \in \mathbb{N}$.

4. $-\frac{3}{7}$; $-7,83$; 14 ; $-10,6$; 14 ; -21 .

5. a) $3a^2 - 4a + 1 < \frac{4a-2}{a-1}$;

b) $-3ab + 18ab^2 - a^3 > \frac{1}{2}a - 12b$;

c) $2abc - 4ab^2c + 4c^2 < \frac{3-c}{2-b} - \frac{c}{a+1}$.

6. a) $x \neq 0$;

b) $x \neq 0$;

c) $x \neq -\frac{4}{5}$, $x \neq \frac{2}{3}$;

d) $x \neq -\frac{5}{2}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq 0$;

e) $x \neq -2$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq 2$.

7. a) -6 ;

b) 1 ;

c) $-\frac{19}{4}$;

d) $\frac{27}{4}$;

e) $-\frac{74}{21}$;

f) nincs értelmezve.

8. $s = v \cdot t + (v-3) \cdot (t+1)$

9. a) A könyvek száma: $t \cdot k + m$.

b) A könyvek száma: $(t-j) \cdot k$.

10. $a \cdot l \leq t \leq a \cdot f$

2. Hatványozás

1. a) $5^{12} > (5^5)^2$;

b) $2^4 \cdot 2^5 > (2^4)^2$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{3^4}$;

d) $3^6 = (3^2)^3 < (3^2 \cdot 3^3)^2 = 3^{10}$;

e) $3^9 \cdot 5^9 = 15^9 < 9^{15} = 3^{10} \cdot 9^{10}$;

f) $5^{12} \cdot 2^{14} \cdot 16 = 125^4 \cdot 64^3 < 100^7 = 5^{12} \cdot 2^{14} \cdot 25$.



2. a) 64000; b) 343; c) $\frac{1}{4}$; d) $3^{16} = 43046721$;
 e) $\frac{4}{3}$; f) $\frac{2^{17}}{5^4}$; g) 529; h) $\frac{1}{7}$.

3. a) $a^6 b^3$; b) $a^5, a \neq 0$; c) $ab^2, a \text{ és } b \neq 0$; d) $xy^2, x \text{ és } y \neq 0$;
 e) $2xy, x \text{ és } y \neq 0$; f) $\frac{a^4}{b^2}, a \text{ és } b \neq 0$; g) $a^3 b^2, a \text{ és } b \neq 0$.

4. a) 2000; b) 35; c) 32; d) 15.

Rejtvény: $b = 4, c = 3, a = 2$.

3. Hatványozás egész kitevőre

1. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{9}$; c) 9;
 d) $-\frac{3}{2}$; e) 5; f) $\frac{1}{5}$;
 g) $\frac{7^{14}}{3^3}$; h) $\frac{25}{2}$; i) $\frac{3}{5^{11}}$.

2. a) $\frac{b^2}{a^2}, a \text{ és } b \neq 0$; b) $\frac{1}{8x^3}, x \neq 0$; c) $\frac{b}{a^4}, a \text{ és } b \neq 0$;
 d) $\frac{1}{a^{16}}, a \neq 0$; e) $\frac{a^{10}}{4b^8}, a \text{ és } b \neq 0$; f) $\frac{y^8}{x^3}, x \text{ és } y \neq 0$;
 g) $a^4 \cdot b^8, a \text{ és } b \neq 0$; h) $2^7 \cdot x^{32} \cdot y^2, x \text{ és } y \neq 0$.

3. a) $2^{-4} \cdot 3^3 \cdot 5^{-4}$; b) $2^9 \cdot 3^{-4}$; c) $5^4 \cdot 2^{-8}$.

4. a) 2; b) 10; c) 1;
 d) 49; e) 4096.

5. a) $4^{-3} = \frac{1}{64} > \frac{1}{81} = 3^{-4}$; b) $10^{-7} = \frac{1}{10^7} > \frac{1}{25 \cdot 10^6} = 2^{-6} \cdot 5^{-8}$;

c) $32^{-5} = \frac{1}{2^{25}} > \frac{1}{3 \cdot 2^{24}} = 3^{-7} \cdot (3 \cdot 2^{-4})^6$; d) $3^7 \cdot 6^{-8} = \frac{1}{3 \cdot 2^8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot 18^{-3}$.

Rejtvény: $a = 3, b = 5, c = 2, d = 0$.



4. A számok normál alakja

- $2 \cdot 10^7$ szemet tartalmaz.
- $500 \text{ másodperc} = \frac{25}{3} \text{ perc} \sim 8,3 \text{ perc}.$
- $6,25 \cdot 10^{15}$ elektron.
- A bolygók össztömege $\sim 266\,900 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 2,669 \cdot 10^{27} \text{ kg}$. A Nap tömege $1990 \cdot 10^{27} \text{ kg}$. Az arány 0,134%.

Rejtvény: $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 5$.

5. Egész kifejezések (polinomok)

- $0,4a^2 - 2b$; $-2d^3 + 3$; $2,3g^2 - 3g^4$; $38s^3t^2 - 7s^2t$; $11x^4y^2$.
- | | | |
|----------------------|---------------------------|-------------------------|
| a) $3y^2 + 4y - 3$; | b) $5x^3 - x^2 - x - 4$; | c) $2a^2b - ab + b^2$. |
|----------------------|---------------------------|-------------------------|
- | | | |
|-----------------|-------------------|-----------------------------|
| a) $-3y - 1$; | b) $-6x^2 + 9x$; | c) $5a^2b + 6ab - 11ab^2$; |
| d) $-a^2 - a$; | e) $14x$; | f) $3x^2y + 7xy + 4xy^2$. |
- | | | |
|------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| a) $28a^2 - 12a$; | b) $6x^3 - 9x^2 + 21x$; | c) $6a^3 + 3a^2 - 21a$; |
| d) $-6a^2 + 13a - 6$; | e) $6x^3 - 3x^2 - 8x + 15$; | f) $8x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 2$. |
- | | | |
|--------------------------------------|------------------------|------------------|
| a) $a^2 + 4a + 4$; | b) $49a^2 - 42a + 9$; | c) $64a^2 - 1$; |
| d) $a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2b + 1$. | | |
- Az együtthatók összegét az $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk, ami 1.

6. Nevezetes szorzatok

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| a) $36a^2 - 60ab + 25b^2$; | b) $100a^2 + 40ab + 4b^2$; | c) $64x^2 + 48xy + 9y^2$; |
| d) $49x^4 + 42x^2 + 9$; | e) $a^2 - 18ab^3 + 81b^6$; | f) $16a^4 - 40a^2b^5 + 25b^{10}$; |
| g) $\frac{25}{49}a^2 + \frac{10}{21}ab + \frac{1}{9}b^2$; | h) $\frac{49}{121}x^8 - \frac{21}{44}x^4y^3 + \frac{9}{64}y^6$. | |
- | | |
|---|--|
| a) $4a^2 + 16b^2 + c^6 + 16ab + 4ac^3 + 8bc^3$; | |
| b) $25x^2 + 9y^4 + 4 + 20x - 30xy^2 - 12y^2$; | |
| c) $36x^2 + \frac{4}{9}y^2 + 16z^4 - 8xy - 48xz^2 + \frac{16}{3}yz^2$; | |
| d) $\frac{9}{16}a^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{49} - ab + \frac{3}{14}a - \frac{4}{21}b$; | |
| e) $4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + d^2 - 12ab + 16ac - 4ad - 24bc + 6bd - 8cd$. | |



3. a) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$; b) $64a^6 - 96a^4b + 48a^2b^2 - 8b^3$;
 c) $\frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 + 8y^3$; d) $\frac{8}{125}x^3 - \frac{4}{25}x^2y^3 + \frac{2}{15}xy^6 - \frac{1}{27}y^9$;
 e) $\frac{1}{64}a^6 + \frac{15}{16}a^4b + \frac{75}{4}a^2b^2 + 125b^3$; f) $\frac{27}{125}a^3 - \frac{54}{125}a^2b + \frac{36}{125}ab^2 - \frac{8}{125}b^3$.
4. a) $49x^2 - 36y^2$; b) $9a^2 - 25b^2$; c) $\frac{x^2}{25} - 49$; d) $x^4 - 36a^2$;
 e) $1,44a^6 - 81b^4$; f) $64x^4y^2 - 9x^2y^4$; g) $\frac{a^2}{4} - \frac{121}{4}b^2$; h) $\frac{36}{25}x^4 - \frac{4}{25}y^4$.
5. a) $x^4 + 8x^3 + 12x^2y - 46x^2 + 6xy^2 + y^3 + y^2 + 25$;
 b) $-5x^2 - 4xy + 4y^2$; c) $150a^2b - 80a^2 + 2b^3 + 45b^2$;
 d) $\frac{7}{2}x^3 + \frac{13}{2}x^2 + \frac{39}{2}x + 16$; e) $\frac{25}{9}a^2 + \frac{16}{3}a - 8$.
6. a) $(x-3)^2 + 1$; b) $(x+6)^2 + 3$; c) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$;
 d) $\left(x + \frac{21}{2}\right)^2 - \frac{357}{4}$; e) $3(x-1)^2 + 5$; f) $-2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$.
7. a) $a^3 - 8$; b) $b^3 + 27$; c) $8x^3 - 27$.
8. a) $\frac{800 \cdot 74}{1000 \cdot 74} = \frac{4}{5}$; b) $(100-4) \cdot (100+4) = 10\,000 - 16 = 9984$.
9. a) $900 - 1 = (30+1) \cdot (30-1) = 31 \cdot 29$;
 b) $7778^2 - 2223^2 = (7778 + 2223) \cdot (7778 - 2223) = 10\,001 \cdot 5555 = 55\,555\,555$.
- Rejtvény: $632\,757 \cdot 632\,763 = (632\,760 - 3) \cdot (632\,760 + 3) = 632\,760^2 - 9$;
 tehát $632\,757 \cdot 632\,763 < 632\,760^2$.

7. A szorzattá alakítás módszerei

1. a) $4x(3x^2 - 2x + 1)$; b) $2a^2b(3a - 4b)$; c) $10xy(2x - 3y)$;
 d) $7x2y^3(1 - 2x + 3y)$; e) $6a^5b^3(3a^2b + b^4 + 5a^5)$; f) $10xy(2x - 3y)$.
2. a) $(a-b) \cdot (x-y)$; b) $2(a+2) \cdot (3x+y)$; c) $(x-7) \cdot (4a-b)$;
 d) $(5a+2b) \cdot (3x-2y)$; e) $(6a-b) \cdot (2x+3y)$; f) $(3y+2) \cdot (2x-1)$;
 g) $6ax^2 - 9x^2 + 2a - 3 = (2a-3) \cdot (3x^2 + 1)$;
 h) $(2a+b) \cdot (2a-b) \cdot (2x+y)$.



3. a) $(8x-3)^2$;

c) $(3a+7b) \cdot (3a-7b)$;

e) $(7a^2+2b)^2$;

g) $(6a^3-5b^2)^2$;

i) $(a^8+1) \cdot (a^4+1) \cdot (a^2+1) \cdot (a+1) \cdot (a-1)$.

b) $(11+4x)^2$;

d) $\left(\frac{2}{3}x+y\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x-y\right)$;

f) $(4a^2+1) \cdot (2a+1) \cdot (2a-1)$;

h) $\left(\frac{3}{7}x-\frac{2}{3}y\right)^2$;

4. a) $5(3x-4)^2$;

c) $2a^2b(2b-a^2)^2$;

e) $2(x+5) \cdot (x-1)$;

b) $3a^2(a^2+3b)^2$;

d) $(x-7) \cdot (x+3)$;

f) $(x^2+3) \cdot (3x^2+4)$.

5. a) $(x^2+x+1) \cdot (x^2+x+1)$;

c) $(x^4+2x^2+2) \cdot (x^4-2x^2+2)$.

b) $(x^2-2x+2) \cdot (x^2+2x+2)$;

Rejtvény: (113; 112); (39; 36); (25; 20); (17; 8); (15; 0).

8. Műveletek algebrai törtekkel

1. a) $\frac{x^2}{2y^2}$, x és $y \neq 0$;

c) $\frac{3x-1}{3x+1}$, $x \neq \pm \frac{1}{3}$;

e) $\frac{x+5}{x-5}$, $x \neq 5$ és $x \neq -3$;

b) $\frac{3(2x-3)}{2x+3}$, $x \neq \pm \frac{3}{2}$;

d) $\frac{x-3}{2x+5}$, $x \neq -\frac{5}{2}$;

f) $\frac{3a+1}{a-1}$, $a \neq 1$ és $b \neq -\frac{3}{2}$.

2. a) $\frac{9ab^2y^2}{8x}$;

d) $\frac{2(2b+3)}{3b-2}$;

g) $\frac{3}{5(a-b)}$;

b) $\frac{5a^2y}{6x}$;

e) -2 ;

h) $\frac{2(x-1)}{x+1}$.

c) $\frac{1}{3(3x-2)}$;

f) 6 ;

3. a) $\frac{3x+2}{2x^2}$, $x \neq 0$;

c) $\frac{3x}{2(3x+1)}$, $x \neq -\frac{1}{3}$;

b) $\frac{5-21a}{15a^2}$, $a \neq 0$;

d) $\frac{-b^2+2b+6}{(b+2)^2}$, $b \neq -2$;



$$e) \frac{4a^2 - 2a + 3}{(2a + 3) \cdot (2a - 3)^2}, \quad a \neq \pm \frac{3}{2};$$

$$f) \frac{3a^2 - 51a + 98}{(a + 7) \cdot (a - 7)^2}, \quad a \neq \pm 7;$$

$$g) -\frac{2(9y + 1)}{(3y + 1)^2 \cdot (3y - 1)^2}, \quad y \neq \pm \frac{1}{3};$$

$$h) \frac{4x}{(x + 1) \cdot (x - 1)^3}, \quad x \neq \pm 1.$$

Rejtvény: az összeg 102.

9. Oszthatóság

1. Mivel $8 \mid 1000$, egy $1000a + b$ ($a; b \in \mathbb{N}$) alakú szám akkor és csak akkor osztható 8-cal, ha $8 \mid b$.
2. A 2^{4k+2} ($k \in \mathbb{N}$) alakú számok 4-re végződnek, a 6-ra végződő számok pozitív egész kitevőjű hatványai pedig 6-ra. Így a $426^{19} + 2^{58}$ 0-ra végződik, tehát osztható 10-zel.
3. A $3k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) alakú számok pozitív egész kitevőjű hatványainak 3-as maradéka 1. Mindhárom alap ilyen alakú, tehát az összeg osztható 3-mal.
4. a) Tudjuk, hogy $15 \mid k \Leftrightarrow 5 \mid k$ és $3 \mid k$.
 $5 \mid \overline{5x327y} \Leftrightarrow y = 0; 5$.
 $y = 0: 3 \mid \overline{5x3270} \Leftrightarrow x = 1; 4; 7$.
 $y = 5: 3 \mid \overline{5x3275} \Leftrightarrow x = 2; 5; 8$.
5. $20a + 6b = 3(a + 2b) + 17a$. A feltétel miatt mindkét tag osztható 17-tel, így az összeg is osztható.
6. Ha $p = 2$, akkor $p + 7 = 9$, mely nem prím.
Ha $p > 2$, akkor páratlan, és $p + 7$ páros, tehát nem lehet prím.
Tehát nincs ilyen p prímszám.
7. Van, például $p = 3$.
8. a) 3 a maradék; b) 2 a maradék; c) 0 a maradék.
9. a) 5 a maradék; b) 5 vagy 11 a maradék.
10. 27-nek 4 osztója, 48-nak 10 osztója, 64-nak 7 osztója, 121-nek 3 osztója, 500-nak 12 osztója, 625-nek 5 osztója van. A nem négyzetszámoknak van páros számú osztója.
11. A 48 a legkisebb ilyen szám.



10. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

1. a) $\frac{19}{23}$; b) $\frac{2}{33}$; c) $\frac{15}{7}$.

2. Legközelebb 408 méter távolságra fordul elő.

3. Kétszer, 8.30-kor és 11.00-kor.

4. Igaz.

5. 35 és 140, vagy 70 és 105.

6. $a = 2 \cdot 3$; $b = 3 \cdot 5$; $c = 5 \cdot 7$.

7. $[a; b] = b$ és $(a + b; b) = a$.

8. $a = 9$; 18; 36; 72.

9. Tudjuk, hogy $7 \mid x$ és $60 \mid x - 1$. Így a legkisebb ilyen szám a 301.

10. Bontsuk fel a -t és b -t prímtényezős alakban. A közös tényezők közül a kisebb kitevőjűek az $(a; b)$ -ben, a nagyobb kitevőjűek az $[a; b]$ -ben, az azonos kitevőjűek mindkettőben szerepelnek. A nem közös tényezők $[a; b]$ -ben szerepelnek a bal oldalon. Így a illetve b tényezői közül mind szerepel a bal oldalon és más tényezők nem. Tehát a két oldal egyenlő.

Rejtvény: Mivel $(a; b) \mid [a; b]$, $(a; b) \mid a$ és $(a; b) \mid b$, ezért $(a; b) \mid p$. Tehát $(a; b) = p$ vagy $(a; b) = 1$.

a) Ha $(a; b) = p$, akkor

$$a = k \cdot p; \quad b = l \cdot p; \quad (k; l) = 1; \quad k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

Így

$$\begin{aligned} k \cdot l \cdot p + p &= k \cdot p + l \cdot p + p, \\ (k - 1) \cdot (l - 1) &= 1. \end{aligned}$$

Ez nem lehet, hisz $k = l = 2$ kellene legyen.

b) Ha $(a; b) = 1$, akkor $[a; b] = a \cdot b$.

Így

$$\begin{aligned} a \cdot b + 1 &= a + b + p, \\ (a - 1) \cdot (b - 1) &= p. \end{aligned}$$

Az egyik tényező 1, a másik p . Legyen $a = 2$ és $b = p + 1$. Ha $(a; b) = 1$, akkor p nem lehet páratlan, tehát $p = 2$.

Tehát $a = 2$, $b = 3$, $p = 2$.



11. Számrendszerek

1. a) $34056_8 = 3 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 = 14382$;
b) $10111101_2 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 189$;
c) $22302_5 = 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 = 1577$.
2. Mivel $12150301_6 = 387613$, és $1365034_8 = 387612$, ezért $12150301_6 > 1365034_8$.
3. a) $1572 = 11000100100_2$; b) $1572 = 120210_4$; c) $1572 = 4404_7$.
4. $34251_6 = 1023313_4$
5. 4 a maradék.
6. 0 a maradék.
7. a) 234423_5 ; b) 3033332_5 ; c) 133422_5 ; d) 4333204133_5 .
8. 1 kg-tól 40 kg-ig bármekkora tömeget, melynek mérőszáma egész.

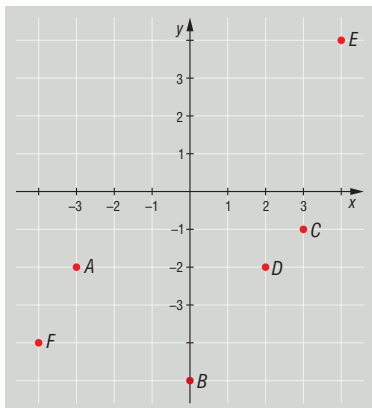
Rejtvény: $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$.



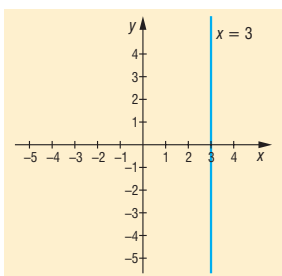
Függvények

1. A derékszögű koordináta-rendszer, pontthalmazok

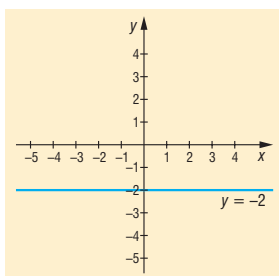
1.



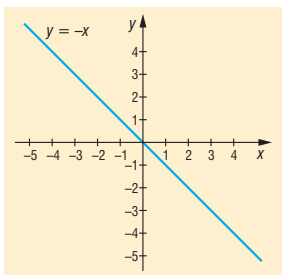
2. a)



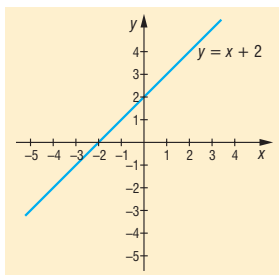
b)



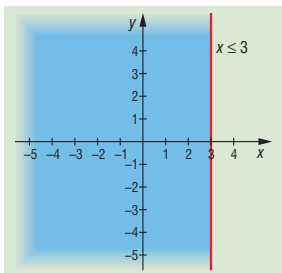
c)



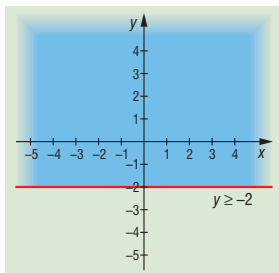
d)

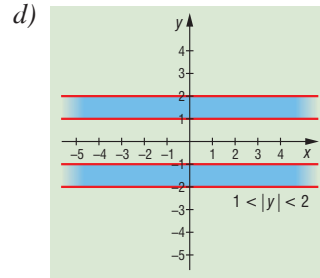
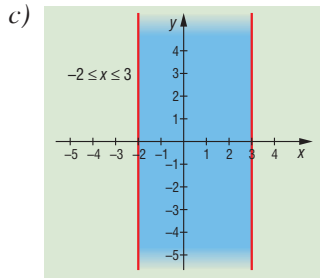


3. a)

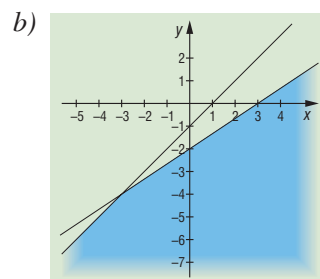
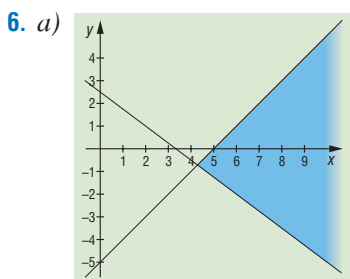
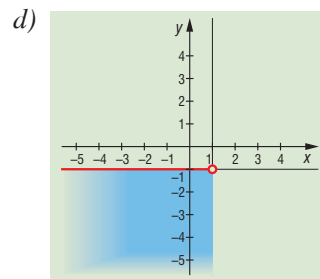
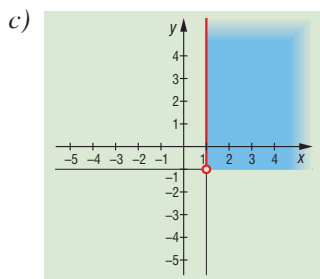
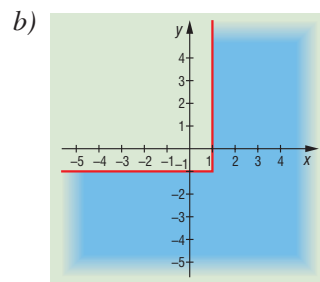
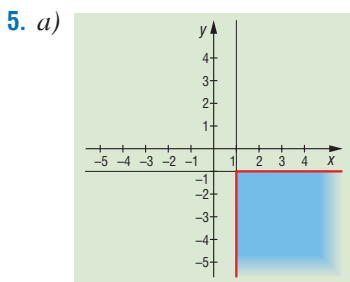
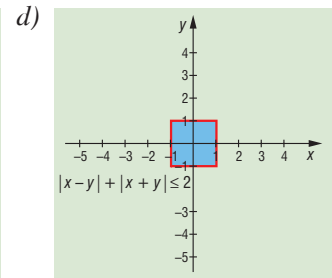
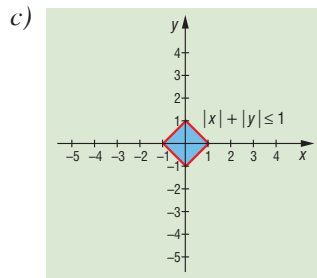
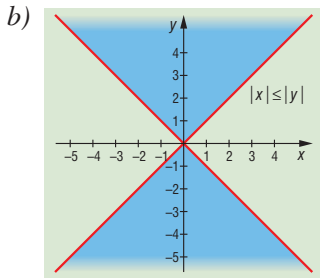


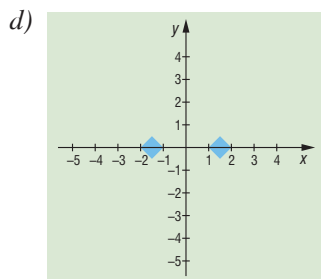
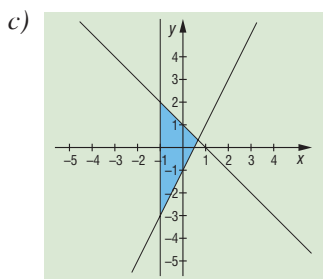
b)





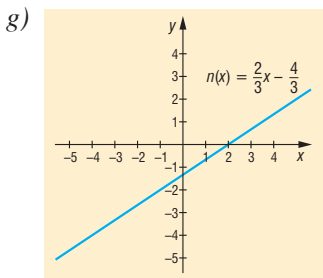
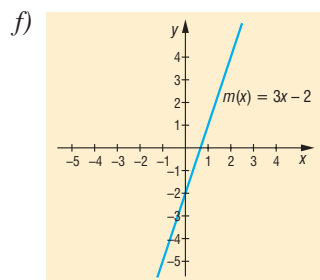
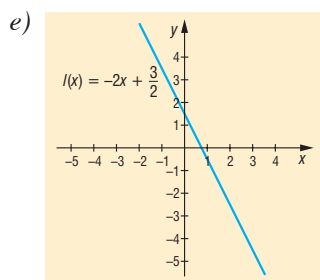
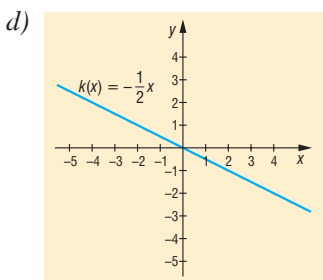
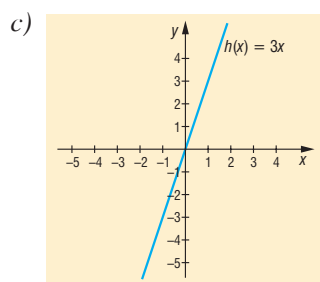
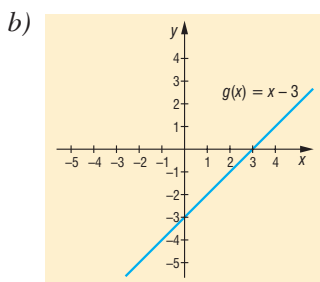
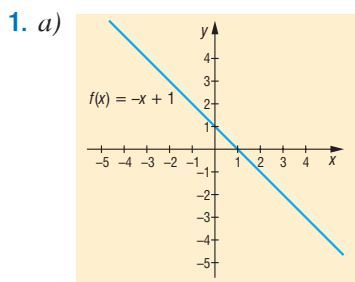
4. a) A tengelyek pontjai.





Rejtvény: a) 8 s b) $\frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

2. Lineáris függvények



2. a) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$, $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$



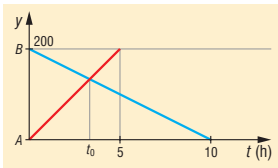
3. a) $P \in f$; $P_1 \notin f$; $P_2 \in f$

b) $Q \notin g$; $Q_1 \in g$; $Q_2 \in g$

4. a) $R \notin \overline{PQ}$

b) $R \in \overline{PQ}$

5.



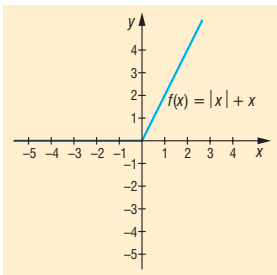
$$40t_0 = 200 - 20t_0$$

$$t_0 = \frac{10}{3}$$

3 óra 20 perc múlva találkoznak.

3. Az abszolútérték-függvény

1. a)



$$f(x) = \begin{cases} 2x; & \text{ha } x \geq 0 \\ 0; & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [0; \infty)$$

$(-\infty; 0]$ konstans

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

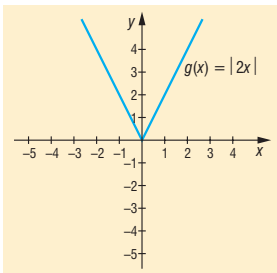
min. van, helye $x \in (-\infty; 0]$, értéke: $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x \in (-\infty; 0]$

b)



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = [0; \infty)$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

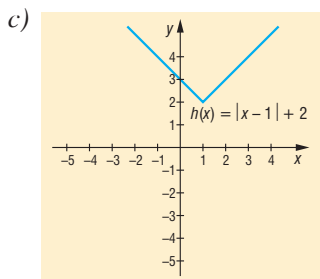
max. nincs

min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$

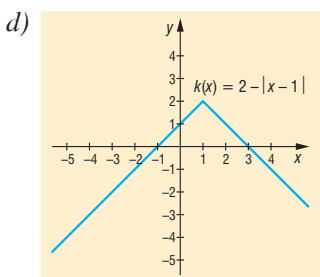
felülről nem korlátos

alulról korlátos

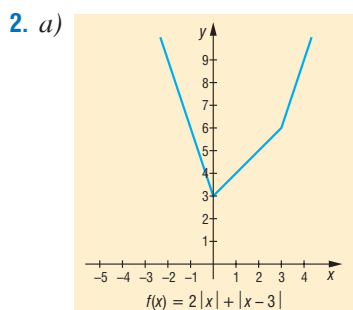
zérushely nincs



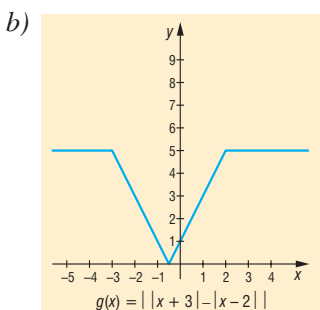
$D_h = \mathbb{R}$
 $R_h = [2; \infty)$
 $(-\infty; 1]$ szig. mon. csökkenő
 $[1; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. van, helye $x = 1$, értéke $y = 2$
 felülről nem korlátos
 alulról korlátos
 zérushely nincs



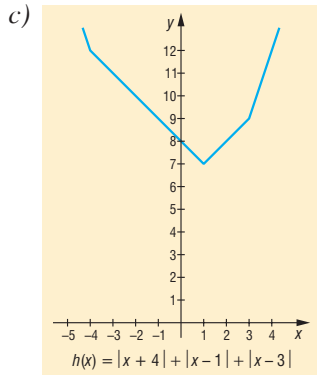
$D_k = \mathbb{R}$
 $R_k = (-\infty; 2]$
 $(-\infty; 1]$ szig. mon. növekvő
 $[1; \infty)$ szig. mon. csökkenő
 max. van, helye $x = 1$, értéke $y = 2$
 min. nincs
 felülről korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely: $x = -1, x = 3$



$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = [3; \infty)$
 $(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
 $[0; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 3$
 felülről nem korlátos
 alulról korlátos
 zérushely nincs

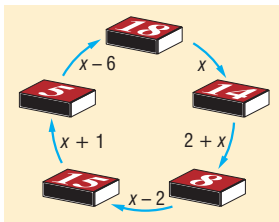


$D_g = \mathbb{R}$
 $R_g = [0; \infty)$
 $(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő
 $[0; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. van, helye $x = -1$, értéke $y = 0$
 felülről nem korlátos
 alulról korlátos
 zérushely nincs



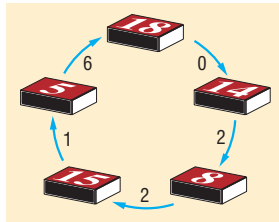
$D_h = \mathbb{R}$
 $R_h = [7; \infty)$
 $(-\infty; 1]$ szig. mon. csökkenő
 $[1; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. van, helye $x = 1$, értéke $y = 7$
 felülről nem korlátos
 alulról korlátos
 zérushely nincs

3. a)

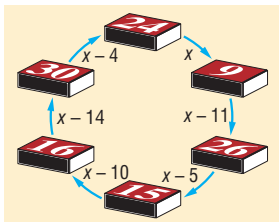


A függvény az
 $f(x) = |x| + |2+x| + |x-2| + |x+1| + |x-6|$.
 Minimumhelye $x = 0$.

Tehát:

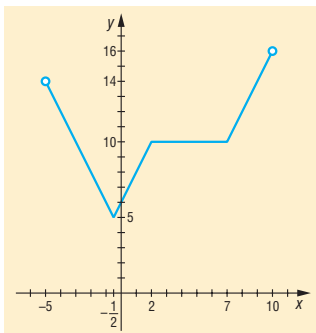


b)



A függvény az
 $f(x) = |x| + |x-11| + |x-5| + |x-10| + |x-14| + |x-4|$.
 Minimumhelye $x \in [5; 10]$.
 Így x lehet 5; 6; 7; 8; 9 vagy 10.

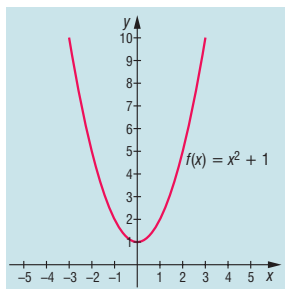
4.





4. A másodfokú függvény

1. a)



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [1; \infty)$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

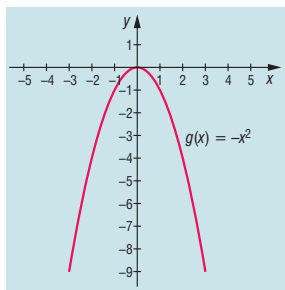
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 1$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely nincs

b)



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = (-\infty; 0]$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. növekvő

$[0; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$

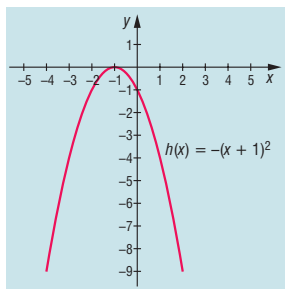
min. nincs

felülről korlátos

alulról nem korlátos

zérushely: $x = 0$

c)



$$D_h = \mathbb{R}$$

$$R_h = (-\infty; 0]$$

$(-\infty; -1]$ szig. mon. növekvő

$[-1; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. van, helye $x = -1$, értéke $y = 0$

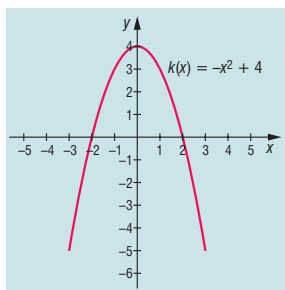
min. nincs

felülről korlátos

alulról nem korlátos

zérushely: $x = -1$

d)



$$D_k = \mathbb{R}$$

$$R_k = (-\infty; 4]$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. növekvő

$[0; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 4$

min. nincs

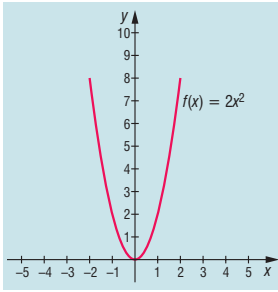
felülről korlátos

alulról nem korlátos

zérushely: $x = \pm 2$



2. a)



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [0; \infty)$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

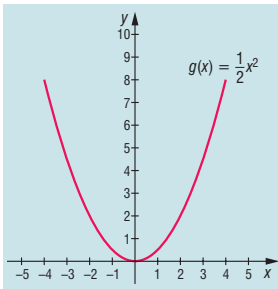
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = 0$

b)



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = [0; \infty)$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. csökkenő

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

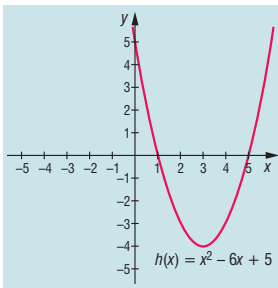
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = 0$

c)



$$D_h = \mathbb{R}$$

$$R_h = [-4; \infty)$$

$(-\infty; 3]$ szig. mon. csökkenő

$[3; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

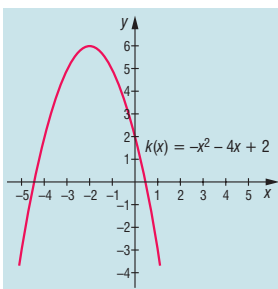
min. van, helye $x = 3$, értéke $y = -4$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = 1$ vagy $x = 5$

d)



$$D_k = \mathbb{R}$$

$$R_k = (-\infty; 6]$$

$(-\infty; 2]$ szig. mon. növekvő

$[2; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. van, helye $x = -2$, értéke $y = 6$

min. nincs

felülről korlátos

alulról nem korlátos

zérushely: $x = -2 - \sqrt{6}$ vagy $x = -2 + \sqrt{6}$



3. A kő röpte h magasságának idő függvénye: $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

Zérushelye: $t = 0$, illetve $t = \frac{2v_0}{g} = 4$.

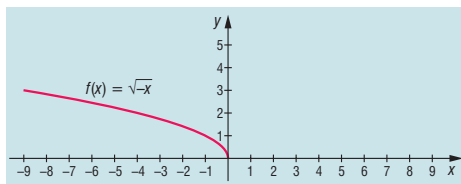
Tehát 4 s múlva ér földet.

Maximumának helye $t = 2$, értéke $h(2) = 20$.

A kő 20 m magasra repül fel.

5. A négyzetgyök függvény

1. a)



$$D_f = (-\infty; 0]$$

$$R_f = [0; \infty)$$

szig. mon. csökkenő

max. nincs

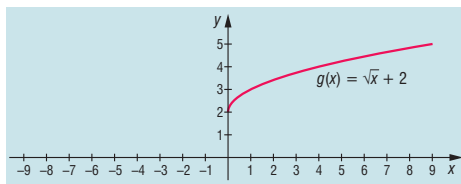
min. van, helye $x = 0$, értéke: $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = 0$

b)



$$D_g = [0; \infty)$$

$$R_g = [2; \infty)$$

szig. mon. növekvő

max. nincs

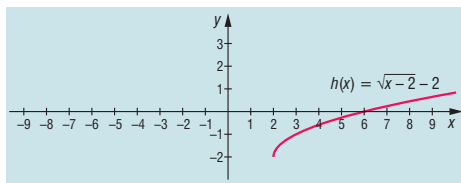
min. van, helye $x = 0$, értéke $y = 2$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely nincs

c)



$$D_h = [2; \infty)$$

$$R_h = [-2; \infty)$$

szig. mon. növekvő

max. nincs

min. van, helye $x = 2$, értéke $y = -2$

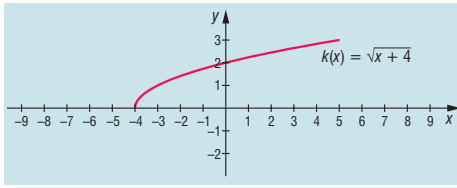
felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = 6$



d)



$$D_k = [-4; \infty)$$

$$R_k = [0; \infty)$$

szig. mon. növő

max. nincs

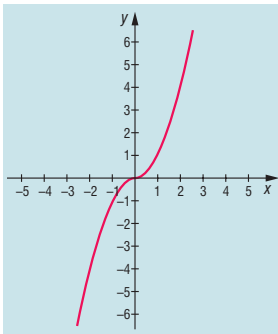
min. van, helye $x = -4$, értéke: $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely: $x = -4$

2. a)

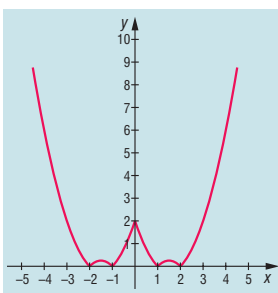


szig. mon. növő

max. nincs

min. nincs

b)



$(-\infty; -2] \cup [-1,5; -1] \cup [0; 1] \cup [1,5; 2]$ szig. mon. csök.

$[-2; -1,5] \cup [-1; 0] \cup [1; 1,5] \cup [2; \infty)$ szig. mon. növő

max. nincs

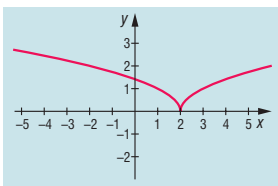
lokális max. van, helye: $x_1 = 0$ $x_2 = -1,5$ $x_3 = 1,5$

$$\text{értéke: } y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{4} \quad y_3 = \frac{1}{4}$$

min. van, helye: $x_1 = -2$ $x_2 = -1$ $x_3 = 1$ $x_4 = 2$

értéke: $y = 0$

c)



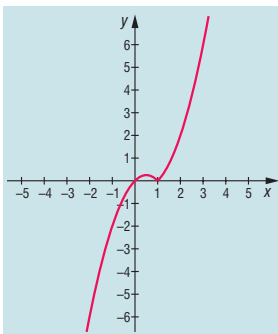
$(-\infty; 2]$ szig. mon. csökkenő

$[2; \infty)$ szig. mon. növő

max. nincs

min. van, helye $x = 2$, értéke $y = 0$

d)



$(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; \infty)$ szig. mon. növő

$[\frac{1}{2}; 1]$ szig. mon. csökkenő

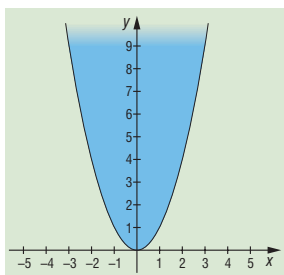
max., illetve min. nincs

lokális max.: helye $x = \frac{1}{2}$, értéke $y = \frac{1}{4}$

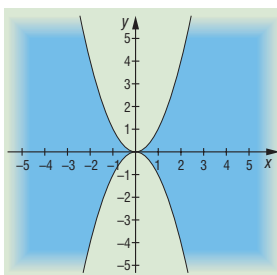
lokális min.: helye $x = 1$, értéke $y = 0$



3. a)

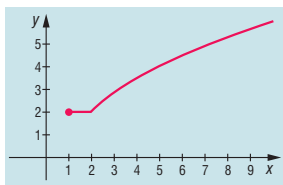


b)



c) ugyanaz, mint b)

4.



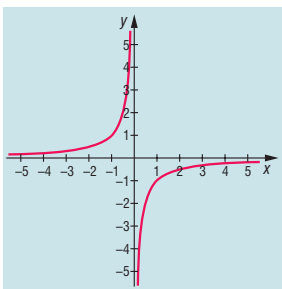
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ 2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

5. $x = 0,6$ $g(0,6) = 5$ a maximum helye és értéke

6. Minimum helye $x = 0$, értéke $y = \sqrt{3}$.

6. Lineáris törtfüggvények

1. a)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$(-\infty; 0)$ szig. mon. növekvő

$(0; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. nincs

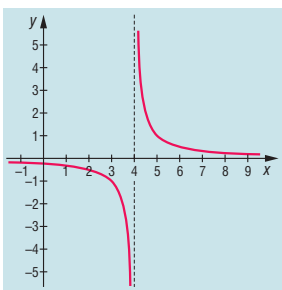
min. nincs

felülről nem korlátos

alulról nem korlátos

zérushely nincs

b)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$(-\infty; 4)$ szig. mon. csökkenő

$(4; \infty)$ szig. mon. csökkenő

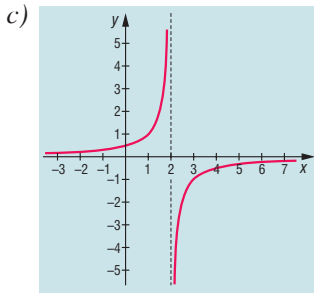
max. nincs

min. nincs

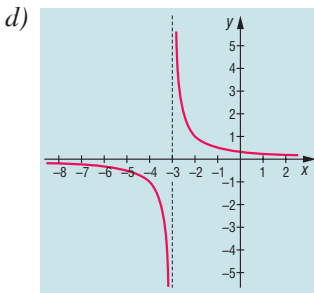
felülről nem korlátos

alulról nem korlátos

zérushely nincs

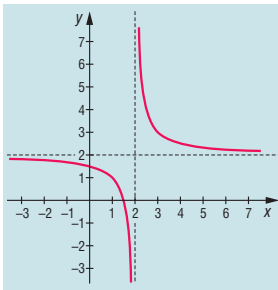


$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(-\infty; 2)$ szig. mon. növekvő
 $(2; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely nincs



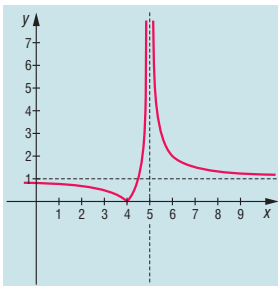
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
 $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(-\infty; -3)$ szig. mon. csökkenő
 $(-3; \infty)$ szig. mon. csökkenő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely nincs

2. a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2 \quad x \neq 2$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
 $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $(-\infty; 2)$ szig. mon. csökkenő
 $(2; \infty)$ szig. mon. csökkenő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely $x = 1,5$

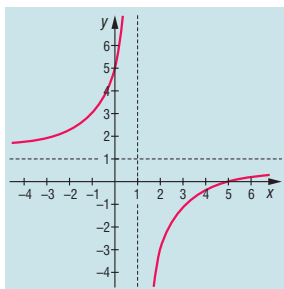
b) $g(x) = \left| \frac{1}{x-5} + 1 \right| \quad x \neq 5$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
 $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 $(-\infty; 4]$ szig. mon. csökkenő
 $[4; 5)$ szig. mon. növekvő
 $(5; \infty)$ szig. mon. csökkenő
 max. nincs
 min. van, helye $x = 4$, értéke $y = 0$
 felülről nem korlátos
 alulról korlátos
 zérushely $x = 4$

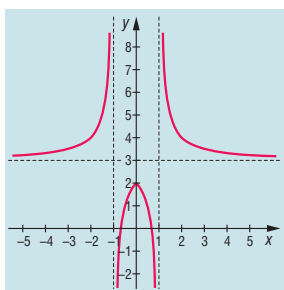


c) $h(x) = -\frac{4}{x-1} + 1 \quad x \neq 1$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $(-\infty; 1)$ szig. mon. növekvő
 $(1; \infty)$ szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely $x = 5$

d) $k(x) = \frac{1}{|x|-1} + 3 \quad x \neq \pm 1$



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 $R_f = \mathbb{R} \setminus (2; 3]$
 $(-\infty; -1)$ szig. mon. növekvő
 $(-1; 0]$ szig. mon. növekvő
 $[0; 1)$ szig. mon. csökkenő
 $(1; \infty)$ szig. mon. csökkenő
 max. nincs
 lokális max. van, helye $x = 0$, értéke $y = 2$
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely $x = \pm \frac{2}{3}$

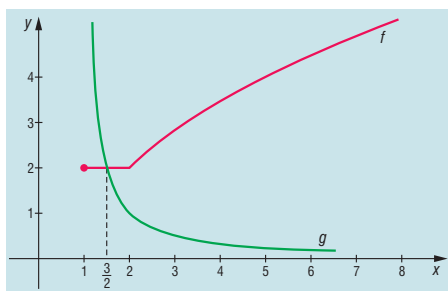
3. a) igen

b) nem

c) nem

d) igen

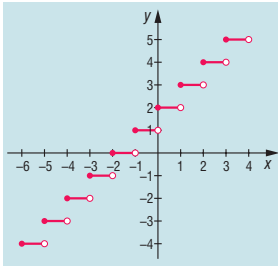
4.





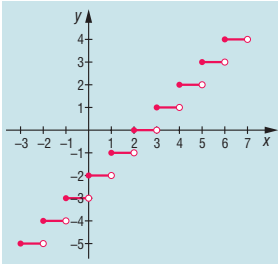
7. Az egészrész, a törtész és az előjelfüggvény

1. a)



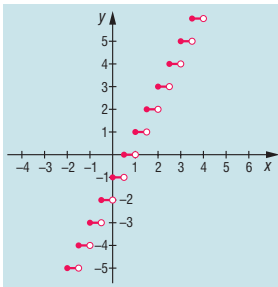
$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \mathbb{Z}$
 mon. növekvő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely van: $x \in [-2; 1)$

b)



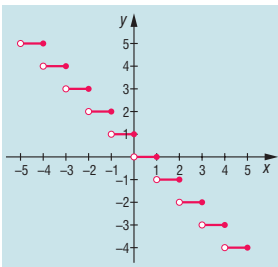
$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \mathbb{Z}$
 mon. növekvő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely van: $x \in [2; 3)$

c)



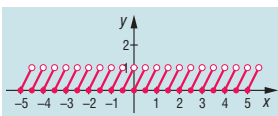
$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \mathbb{Z}$
 mon. növekvő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely van: $x \in [0, 5; 1)$

d)



$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \mathbb{Z}$
 mon. csökkenő
 max. nincs
 min. nincs
 felülről nem korlátos
 alulról nem korlátos
 zérushely van: $x \in (0; 1]$

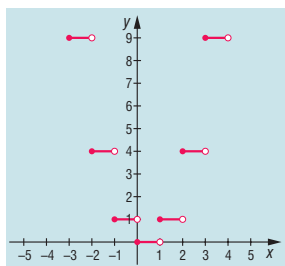
e)



$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = [0; 1)$
 periodikus, periódusa 0,5
 egy perióduson belül szig. mon. növekvő
 max. nincs
 min. van, helye $x = 0,5k$ ($k \in \mathbb{Z}$), értéke $y = 0$
 felülről korlátos
 alulról korlátos
 zérushely van: $x = 0,5k$ ($k \in \mathbb{Z}$)



2. a)



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$(-\infty; 1)$ mon. csökkenő

$[0; \infty)$ mon. növekvő

max. nincs

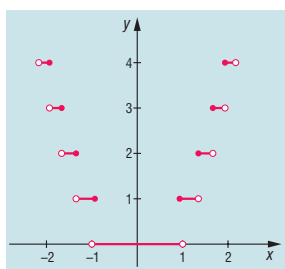
min. van, helye $x \in [0; 1)$, értéke $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely van: $x \in [0; 1)$

b)



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$(-\infty; 1)$ mon. csökkenő

$(-1; \infty)$ mon. növekvő

max. nincs

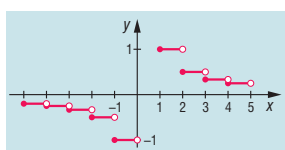
min. van, helye $x \in (-1; 1)$, értéke $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely van: $x \in (-1; 1)$

c)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus [0; 1)$$

$$R_f = \left\{x \mid x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$$

$(-\infty; 0)$ mon. csökkenő

$[1; \infty)$ mon. csökkenő

max. van, helye $x \in [1; 2)$, értéke $y = 1$

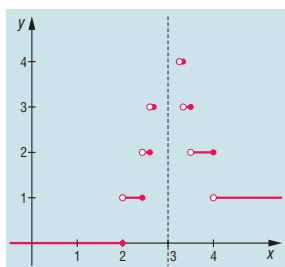
min. van, helye $x \in [-1; 0)$, értéke $y = -1$

felülről korlátos

alulról korlátos

zérushely nincs

d)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$R_f = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$(-\infty; 3)$ mon. növekvő

$(3; \infty)$ mon. csökkenő

max. nincs

min. van, helye $x \in (-\infty; 2]$, értéke $y = 0$

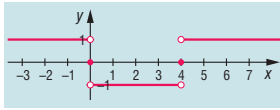
felülről nem korlátos

alulról korlátos

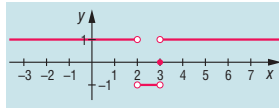
zérushely van: $x \in (-\infty; 2]$



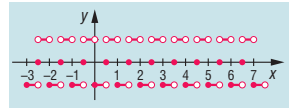
3. a)



b)

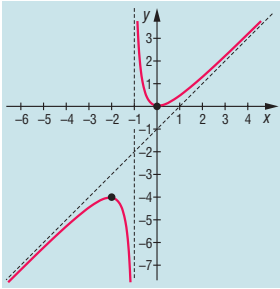


c)



8. További példák függvényekre

1. a)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus (-4; 0)$$

$(-\infty; -2]$ szig. mon. növekvő

$[-2; -1]$ szig. mon. csökkenő

$(-1; 0]$ szig. mon. csökkenő

$[0; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

lokális max. van, helye $x = -2$, értéke $y = -4$

min. nincs

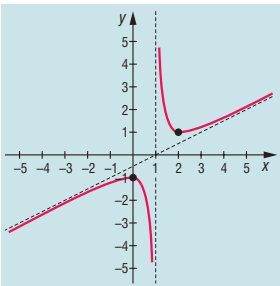
lokális min. van, helye: $x = 0$, értéke $y = 0$

felülről nem korlátos

alulról nem korlátos

zérushely van: $x = 0$

b)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$R_f = \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$$

$(-\infty; 0]$ szig. mon. növekvő

$[0; 1)$ szig. mon. csökkenő

$(1; 2]$ szig. mon. csökkenő

$[2; \infty)$ szig. mon. növekvő

max. nincs

lokális max. van, helye: $x = 0$, értéke $y = -1$

min. nincs

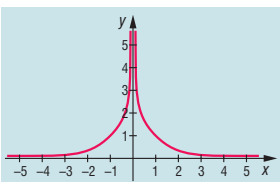
lokális min. van, helye: $x = 2$, értéke $y = 1$

felülről nem korlátos

alulról nem korlátos

zérushely nincs

c)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$R_f = \mathbb{R}^+$$

$(-\infty; 0)$ szig. mon. növekvő

$(0; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. nincs

min. nincs

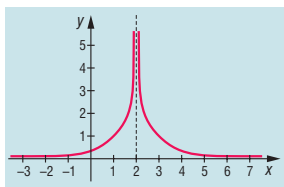
felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely nincs



d)



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$R_f = \mathbb{R}^+$$

$(-\infty; 2)$ szig. mon. növő

$(2; \infty)$ szig. mon. csökkenő

max. nincs

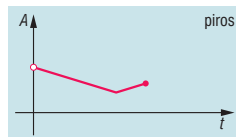
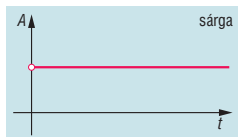
min. nincs

felülről nem korlátos

alulról korlátos

zérushely nincs

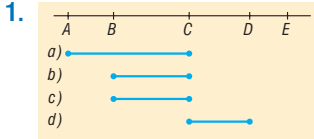
Rejtvény:





Háromszögek, négyszögek, sokszögek

2. Néhány alapvető geometriai fogalom (emlékeztető)



2. a) 4 rész, 2 félegyenes, 2 szakasz
 d) $(n + 1)$ rész, 2 félegyenes, $(n - 1)$ szakasz
 b), c) a d) alapján

3. a) 6 b) 10 c) 21 d) $n + 1$

4. a) 2 b) 3 c) 4 d) 6 e) 11

5. a) 1 b) 10 c) 21 d) 45 e) $\frac{n(n-1)}{2}$

6. a) 1 b) 6 c) 15 d) 45 e) $\frac{n(n-1)}{2}$

7.

<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>AC</i>	<i>BD</i>	<i>AD</i>
3 m	5 m	8 m	8 m	13 m	16 m
4 dm	2 dm	1 dm	6 dm	3 dm	7 dm
2 cm	1 cm	6 cm	3 cm	7 cm	9 cm
5 km	6 km	7 km	11 km	13 km	18 km
11 mm	2 mm	2 cm	13 mm	22 mm	0,33 dm

8. a) $30^\circ; 150^\circ$ b) $48^\circ; 132^\circ$ c) $53,2^\circ; 126,8^\circ$ d) $60^\circ 11'; 119^\circ 49'$

9. $180^\circ = 40^\circ + 140^\circ$

10. a) $\alpha = 145^\circ; \beta = 105^\circ$ b) $\alpha = \frac{470^\circ}{3}; \beta = \frac{280^\circ}{3}$ c) $\alpha = \frac{400^\circ}{3}; \beta = \frac{350^\circ}{3}$

11. -30°



5. Összefüggés a derékszögű háromszög oldalai között

1. a) $90^\circ; 150^\circ; 120^\circ; 90^\circ$
 c) $72^\circ; 98^\circ; 154^\circ; 108^\circ$
 e) $41,9^\circ; 156,5^\circ; 65,4^\circ; 138,1^\circ$
 b) $60^\circ; 135^\circ; 105^\circ; 120^\circ$
 d) $80^\circ; 90^\circ; 170^\circ; 100^\circ$
 f) $1^\circ; 92^\circ; 89^\circ; 179^\circ$
2. a) $\gamma = 65^\circ; \alpha' = 145^\circ; \beta' = 100^\circ; \gamma' = 115^\circ$
 c) $\alpha = 85^\circ; \beta = 45^\circ; \beta' = 135^\circ; \gamma' = 130^\circ$
 e) $\alpha' = 190^\circ$ nem lehetséges
 b) $\beta = 67^\circ; \gamma = 57^\circ; \alpha' = 124^\circ; \gamma' = 123^\circ$
 d) $\beta = 98^\circ; \gamma = 38^\circ; \alpha = 44^\circ; \alpha' = 136^\circ$
 f) $\alpha = 88^\circ; \gamma = 155^\circ$ ez nem lehetséges
3. a) $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 150^\circ; 120^\circ; 90^\circ$
 c) $27^\circ; 63^\circ; 90^\circ; 153^\circ; 117^\circ; 90^\circ$
 e) $35^\circ; 50^\circ; 95^\circ; 145^\circ; 130^\circ; 85^\circ$
 b) $48^\circ; 60^\circ; 72^\circ; 132^\circ; 120^\circ; 108^\circ$
 d) $15^\circ; 67,5^\circ; 97,5^\circ; 165^\circ; 112,5^\circ; 82,5^\circ$
 f) $55^\circ; 60^\circ; 65^\circ; 125^\circ; 120^\circ; 115^\circ$
4. $38^\circ; 60^\circ; 82^\circ; 142^\circ; 120^\circ; 98^\circ$
5. a) van b) van c) van d) nincs
6. a) 4; 3; 2
 c) 84; 83; ..., 21
 b) 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1
 d) 163; ..., 1
7. a) 4 cm; a szárszög a kisebb.
 b) 3 dm; a szárszög a nagyobb, vagy 3 cm és a szárszög a nagyobb, vagy 5 cm és az alapon fekvő szög a nagyobb.
 c) A harmadik oldal (c) lehetséges értéke $0 \text{ m} < c < 8 \text{ m}$.
 Ha $4 \text{ m} < c < 8 \text{ m}$, akkor a szárszög a nagyobb;
 ha $c = 4 \text{ m}$, akkor a szögek egyenlőek;
 ha $0 \text{ m} < c < 4 \text{ m}$, akkor az alapon fekvő szög a nagyobb.
 d) 18 mm, szárszög a kisebb
8. Szabályos háromszög 6 db, egyenlő szárú 23 db, általános 15 db, összesen 44 db háromszög szerkeszthető.
9. a) b b) b c) $b = c$ d) b e) nem háromszög f) c

10. Tudjuk $a = b$.

$$\frac{a+b+c}{2} < a+c$$

$$\Downarrow$$

$$a + \frac{c}{2} < a+c$$

ez igaz

$$a+c < \frac{3}{4}(a+b+c)$$

$$\Downarrow$$

$$4a+4c < 3a+3b+3c$$

$$\Downarrow$$

$$c < 2a$$

ez igaz

Ezzel az állítást beláttuk.

11.

a	3 cm	5 dm	4 m
b	4 cm	12 dm	7 m
c	5 cm	13 dm	$\sqrt{65}$



6. A négyszögekről (emlékeztető)

1. a) $\gamma = 96^\circ$; $\delta = 92^\circ$; $\alpha' = 80^\circ$; $\beta' = 108^\circ$; $\delta' = 88^\circ$
 b) $\gamma = 72^\circ$; $\delta = 83^\circ$; $\alpha' = 110^\circ$; $\beta' = 45^\circ$; $\delta' = 97^\circ$
 c) $\beta < 157^\circ$; $\gamma = 157^\circ - \beta$; $\beta' > 23^\circ$; $\gamma' = \beta + 23^\circ$; $\delta' = 59^\circ$
 d) $\beta = 92^\circ$; $\delta = 10^\circ$; $\gamma = 122^\circ$; $\alpha' = 44^\circ$; $\gamma' = 58^\circ$
2. a) 90° , 90° ; 120° , 60° , 90° , 90°
 b) $107,5^\circ$, $107,5^\circ$; 135° , 80° , $72,5^\circ$, $72,5^\circ$
 c) $92,25^\circ$, $92,25^\circ$; $17,5^\circ$, 167° , $87,75^\circ$, $87,75^\circ$
 d) $\alpha < 198^\circ$, $\beta = 198^\circ - \alpha$; 99° , 99° , $180^\circ - \alpha$, $\alpha - 18^\circ$
3. a) $2\frac{180^\circ}{7}$; $3\frac{180^\circ}{7}$; $4\frac{180^\circ}{7}$; $5\frac{180^\circ}{7}$
 b) $4\frac{180^\circ}{17}$; $7\frac{180^\circ}{17}$; $10\frac{180^\circ}{17}$; $13\frac{180^\circ}{17}$
 c) 45° ; 75° ; 105° ; 135°
 d) nem lehet trapéz
4. a) 30° ; 150°
 b) 127° ; 53°
 c) 129° ; 51°
 d) $143,2^\circ$; $36,8^\circ$
5. a) 45° ; 135°
 b) 80° ; 100°
 c) 75° ; 105°
 d) $\frac{a \cdot 180^\circ}{a+b}$; $\frac{b \cdot 180^\circ}{a+b}$
6. a) 30° ; 150°
 b) 57° ; 123°
 c) 83° ; 97°
 d) 174° ; 6°
7. a) $98,5^\circ$
 b) $90,5^\circ$
 c) 134°
 d) 31°
8. a) 78° vagy 162°
 b) 139° vagy 53°
 c) 104°
 d) 133° vagy 122°
9. a) 60°
 b) 22°
 c) $77,2^\circ$
 d) 2α
10. $\alpha + \beta = 360^\circ - (\gamma + \delta) = 360^\circ - (180^\circ - \gamma' + 180^\circ - \delta') = \gamma' + \delta'$
11. a) hamis
 g) igaz
 b) hamis
 h) igaz
 c) igaz
 i) igaz
 d) igaz
 j) igaz
 e) hamis
 k) hamis
 f) hamis

7. A sokszögekről

1. a) 5
 b) 14
 c) 20
 d) 54°
 e) 377
2. a) 540°
 b) 900°
 c) 1080°
 d) 1800°
 e) 4860°
3. a) 108°
 b) $\frac{900^\circ}{7}$
 c) 135°
 d) 150°
 e) $\frac{4860^\circ}{29}$
4. a) 8
 b) 10
 c) 16
 d) 21
 e) 33
5. a) 5
 b) 7
 c) 11
 d) 19
6. a) 5
 b) 20
 c) 54
 d) 230

7. A külső és belső szögek összege $n \cdot 180^\circ$. Ebből a belső szögek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$. Így a külső szögek összege a kettő különbsége, azaz 360° .



8. a) 6 b) 10 c) 17 d) 36
9. a) 120° ; 60° b) 144° ; 36° c) $157,5^\circ$; $22,5^\circ$ d) $\frac{1140^\circ}{7}$; $\frac{120^\circ}{7}$
10. a) 3 b) 5 c) 9 d) 16
11. a) 4 b) 5 c) 7 d) 9
12. $5 \cdot 36^\circ + 5 \cdot 252^\circ = 5 \cdot 288^\circ = 1440^\circ$

8. Nevezetes ponthalmazok

- 90°
- A húrt felező átmérő két végpontja.
- A keresett pontok az AB szakasz felező merőlegesének és a körnek a metszéspontjai. Lehet 2, 1 vagy 0 ilyen pont.
- a) Az AB felező merőlegese által meghatározott azon félsík, amely A -t tartalmazza.
b) Az a félsík, amely B -t tartalmazza (a határegyenes nélkül).
- A középpont a szögtartományban a száraktól 2 cm-re lévő, velük párhuzamos két egyenes metszéspontja.
- Mindkét szárhoz létezik egy ilyen kör.
- Mivel a szögfelezők az oldalakkal 45° -os szöget zárnak be, egymásra a metszőek merőlegesek, a szemközti párhuzamosak. Így egy téglalapot határoznak meg.
- a) A keresett körök középpontjai az A és B középpontú, 4 cm sugarú körök metszéspontjai. 2 megoldás van.
b) A keresett középpontok az A és B középpontú, 5 cm sugarú körök metszéspontjai és az A középpontú 1 cm / 5 cm, illetve B középpontú 5 cm / 1 cm sugarú körök metszéspontjai. 4 megoldás van.
c) A keresett középpontok az A és B középpontú, 6 cm sugarú körök metszéspontjai és az A középpontú 2 cm / 6 cm, illetve B középpontú 6 cm / 2 cm sugarú körök metszéspontjai. 6 megoldás van.
- $|x| = |y|$
- Egy pontban metszik egymást.
- Egy pontban metszik egymást.

Rejtvény: Az egyik pont mint középpont körül a másik ponton keresztül rajzolunk egy kört, majd ugyanezen távolsággal a kerületen lévő pontból kiindulva a körön felmérünk 6 pontot. Ezek szabályos hatszöget alkotnak, és bármely két szemközi pontnak a távolsága az eredeti két pont távolságának kétszerese.



9. A háromszög beírt köre

1. a) $60^\circ; 60^\circ; 60^\circ$ b) $74^\circ; 74^\circ; 32^\circ$ c) $84^\circ; 84^\circ; 12^\circ$ d) $20^\circ; 20^\circ; 140^\circ$
4. a) 50 cm^2 . b) $\frac{85}{4} \text{ cm}^2 = 21,25 \text{ cm}^2$.
c) $16,4 \text{ cm}^2$. d) $164,22 \text{ cm}^2$.

10. A háromszög köré írt kör

2. a) Megrajzoljuk a kört, és abban felvesszünk egy, az alappal megegyező hosszúságú húr. A húr felező merőlegese metszi ki a körből a keresett csúcsot. Két megoldás van, ha az alap nem nagyobb a sugár kétszeresénél.
b) A kör területének egy pontjából körözünk a szár hosszával. Ez két pontban metszi a kört, ezek a háromszög keresett csúcsai. Egy megoldás van, ha a szár hossza kisebb mint a sugár kétszerese.

11. Thalész tétele és néhány alkalmazása

1. d) $\sqrt{100 - a^2} \text{ cm}$ a befogó, az átfogó 10 cm .
2. a) 3 cm b) $\sqrt{33} \text{ cm}$ c) $8\sqrt{2} \text{ cm}$ d) $\sqrt{513} \text{ cm}$
3. A két talppont illeszkedik a harmadik oldal Thalész-körére.
4. A két talppont által meghatározott szakasz felező merőlegese metszi ki az oldalegyenesből a harmadik oldalhoz tartozó Thalész-kör középpontját. Ezen középpontból a két talpponton keresztül körözünk, mely kör az oldalegyenesből kimetszi az oldal két végpontját. A talppontok és a végpontok határozzák meg a keresett háromszög oldalait. Két megoldás van, ha a pontok az egyenes egyik oldalán vannak, és egyenesük nem merőleges az egyenesre.
5. A kör az alapot a felezőpontjában metszi, mivel innen a szár derékszögben látszik, és így ez az alaphoz tartozó magasság talppontja.
6. Vegyük fel az átfogót, majd szerkesszünk egy vele párhuzamos egyenest magasság távolságyira. Ebből a párhuzamos egyenesből az átfogó Thalész-köre kimetszi a háromszög harmadik csúcsát. Ha a magasság nagyobb, mint az átfogó fele, akkor nincs megoldás; ha egyenlő vele, akkor egy egyenlő szárú háromszög a megoldás; ha kisebb, akkor két egybevágó háromszögnek kapunk.
7. A körök a harmadik oldalhoz tartozó magasság talppontjában metszik ezt az oldalt.
8. a) $4 \text{ cm}; 1 \text{ cm}$ b) $12 \text{ cm}; 2 \text{ cm}$ c) $6 \text{ cm}; 2 \text{ cm}$ d) $\sqrt{663}; \frac{\sqrt{663} - 17}{2}$

Rejtvény: $K = 12$.



- Ha érintőnégszög, akkor a szemközti oldalak összege egyenlő, azaz az oldalai egyenlők, azaz rombusz.
- A belső szöglefelezők a beírt kör középpontjában metszik egymást, mivel ez az a pont, mely minden szögszártól egyenlő távolságra van.
- a) Felveszünk egy oldalhosszúságú szakaszt, majd párhuzamost szerkesztünk vele kétszeres sugár távolságra. Az oldal két végpontjából oldalhosszúságú sugárral körözünk, így 4 pontot kapunk. Ezeket megfelelően összekötve az oldal végpontjaival, két egybevágó rombuszt kapunk.
b) Felvesszük a beírt kört, majd egy szakaszt, melynek felezőpontja a kör középpontja, hossza pedig az átlóval egyenlő. Az átló két végpontjából a körhöz érintőket szerkesztve megkapjuk a rombuszt.
- Vegyünk fel a beírt kör átmérőjével egyenlő hosszúságú szakaszt, majd mindkét végpontjában állítsunk rá két merőleges félegyeneset azonos irányban. A derékszögek szöglefelezői kimetszik a beírható kör középpontját. Rajzoljuk meg a kört. Az egyik félegyenesre mérjük fel az alap hosszát a derékszögű csücsből, majd az új végpontból szerkesztünk érintőt a beírt körhöz. Ez a másik párhuzamos félegyenesből kimetszi a trapéz negyedik csücsét.
- Vegyünk fel egy derékszöget, majd szerkesszünk egy olyan négyzetet, amelynek egyik csücsa a derékszög csücsa, oldalhosszúsága pedig egyenlő a beírt kör sugarával. A nem a derékszögű szárakra illeszkedő csücs lesz a beírt kör középpontja. Az adott derékszög egyik szárára mérjük fel az adott oldalt a csücsből, majd rajzoljuk meg az így kapott végpont és kör középpontja által meghatározott egyenest. Erre tükrözve a derékszöget megkapjuk a deltoidot.
- a) 6 cm vagy 5 cm vagy 7 cm. b) 34 cm vagy 42 cm.
- A beírt kör középpontját a csúcsokkal összekötve olyan háromszögre bontjuk a négyszöget, melyek magassága a beírt kör sugara. A háromszögek területeinek összege adja a négyszög területét

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{K \cdot r}{2}.$$



Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

1. Az egyenlet, azonosság fogalma

1. a) állítás b) állítás, igaz c) állítás, igaz d) nem állítás
e) állítás, hamis f) nem állítás g) nem állítás
2. a) Igaz, ha x téglalap. b) Igaz, ha $c = 0$.
c) Igaz, ha $x = 12l, l \in \mathbb{Z}^+$. d) Igaz, ha $y = 1; 2; 3; 4; 6; 12$.
e) Igaz, ha $x = 9$. f) Igaz, ha $n = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.
3. a) $x = 2x + 2$ b) $x = 3x - 3$ c) $2(x + 10) = 3x$
d) $3x - 7 = 2x + 5$ e) $6x + 6 = 42$
4. a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
e) $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{4}\right\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ g) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ h) $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{3}{5}\right\}$
5. a) Azonosság, ha $a = 3$, az $x = 0$ mindig megoldás.
b) Azonosság, ha $a = -14$, nincs megoldás, ha $a \neq -14$.
c) Azonosság, ha $a = -4$, mindig van megoldás.
d) Azonosság, ha $a = 1$, a 0 mindig megoldás.
6. a) $x = 1$ b) $x = 1$ c) $x = 3$

Rejtvény: A negyedik állítás igaz csak.

2. Az egyenletek megoldásának grafikus módszere

1. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -\frac{3}{2}$ c) $x = \frac{3}{5}$ vagy $x = 1$ d) $x \geq \frac{2}{3}$
2. $|x| = x + 1$
 $x = -\frac{1}{2}$
3. Nincs.
4. $2 - \frac{1}{x} = x$
 $x = 1$



3. Az egyenlet értelmezési tartományának és értékészletének vizsgálata

1. a) nincs megoldás b) nincs megoldás c) nincs megoldás d) nincs megoldás

2. a) $a < 7$ b) $a < 3$ c) $a < -2$ d) $a < 0$

3. a) $x = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4}$ b) $x = \frac{4}{3}; y = 2$ c) $x = -2; y = \frac{4}{3}$

d) $x = 2; y = \frac{4}{5}$ e) $x = 2$ f) $x = 2; y = -2; z = 1$

Rejtvény: A szorzat 0, mivel a 77. tényező 0, az összeg 0.

4. Egyenlet megoldása szorzattá alakítással

1. $-3; -2; -1; 0$ vagy $-2; -1; 0; 1$ vagy $-1; 0; 1; 2$ vagy $0; 1; 2; 3$

2. a) $x_1 = 4; x_2 = -2; x_3 = \frac{1}{2}; x_4 = -4$

b) $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = \frac{5}{4}$

c) $x_1 = 0; x_2 = -\frac{3}{2}; x_3 = \frac{8}{3}$

d) $x = \frac{4}{5}$

e) $x_1 = 4; x_2 = -\frac{18}{5}$

f) $x_1 = 0; x_2 = \frac{53}{20}$

g) $x_1 = 0; x_2 = 12; x_3 = \frac{13}{8}$

h) $x_1 = \frac{4}{5}; x_2 = -\frac{11}{24}$

3. a) $x_1 = \frac{7}{9}; x_2 = -2$

b) $x_1 = 0; x_2 = \frac{51}{28}$

c) $x_1 = \frac{6}{5}; x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = -4; x_2 = -1$

Rejtvény: A második lépésnél 0-val egyszerűsített, ami nem ekvivalens átalakítás.



5. Megoldás lebontogatással, mérleg-elvvel

1. a) $x = -\frac{1}{4}$ b) $y = -\frac{1}{5}$ c) $z = \frac{135}{59}$ d) $v = \frac{7}{8}$
2. a) $x = -1$ b) $y = -\frac{1}{7}$ c) $z = 12$ d) $v = 0$

6. Egyenlőtlenségek

1. a) $x < 4$ b) $x \geq \frac{4}{3}$ c) $-4 \leq x \leq 1$ d) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$
2. a) $x > 3$ b) $x < 2$ c) $x < -\frac{3}{7}$ d) $x \leq \frac{17}{18}$
3. a) $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ b) $x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $1 \leq x \leq 2$
c) $x < -2$ vagy $\frac{3}{2} < x < 2$ d) $x < -2$ vagy $\frac{3}{2} < x < 2$ vagy $3 < x$
4. a) $-1 < x \leq 1$ b) $x > -1$ c) $x \leq -2$ vagy $-1 < x \leq 1$
5. a) $x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$ b) $-1 < x \leq \frac{1}{5}$ vagy $1 < x$
c) $x < -3$ vagy $-2 < x < 0$ vagy $1 < x$

7. Abszolútértéket tartalmazó egyenletek, egyenlőtlenségek

1. a) $x_1 = -3; x_2 = 3$ b) $x_1 = 3; x_2 = -1$
c) $-3 < x < 3$ d) $x < -1$ vagy $3 < x$
2. a) $x = -\frac{1}{3}$ b) $x_1 = 0; x_2 = 4$
c) $x \in \mathbb{R}$ d) $x = \frac{1}{2}$
3. a) $x \in \mathbb{R}$ b) nincs megoldás
c) $x < 0$ d) $x \leq \frac{5}{3}$ vagy $3 \leq x$
4. a) $-1 \leq x \leq 1$ b) $x_1 = -2; x_2 = -1$
c) $x_1 = -6; x_2 = 6$ d) $x_1 = -5; x_2 = -3; x_3 = 5; x_4 = 7$



5. a) nincs megoldás

c) $-6 < x < 6$

b) $x \leq -\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{2} \leq x$

d) $x \leq -5$ vagy $-3 \leq x \leq 5$ vagy $7 \leq x$

8. Paraméteres egyenletek

1. a) $a = 0$: $x \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$: $x = 1$

c) $a = 0$ és $b = -1$: $x \in \mathbb{R}$

$a = 0$ és $b \neq -1$: $\emptyset$

$a \neq 0$: $x = \frac{b+1}{a}$

b) $b = 1$: $\emptyset$

$b \neq 1$: $x = \frac{b}{b-1}$

d) $a = 0$: $x \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$: $x = a$

2. a) $a = -1$: $x \in \mathbb{R}$

$a \neq -1$: $x = a - 1$

c) $b = 0$: $\emptyset$

$b = 1$: $x \in \mathbb{R}$

$b \neq 0, 1$: $x = \frac{1}{b}$

b) $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$

$a \neq 1$: $x = \frac{1}{a-1}$

d) $a = 0$: $\emptyset$

$a = 1$: $\emptyset$

$a \neq 0, 1$: $x = \frac{2-a}{a(a-1)}$

3. a) $v = \frac{s}{t}$, $t \neq 0$

$t = \frac{s}{v}$, $v \neq 0$

b) $p = \frac{F}{A}$, $A \neq 0$

$A = \frac{F}{p}$, $p \neq 0$

c) $I = \frac{U}{R}$, $R \neq 0$

$R = \frac{U}{I}$, $I \neq 0$

d) $P = \frac{W}{t}$, $t \neq 0$

$t = \frac{W}{P}$, $P \neq 0$

4. $a = b = 0$: nem értelmezhető

$a \neq 0$ és $b \neq 0$: $b = 2a$: $\emptyset$

$b \neq 2a$: $x = \frac{ab}{b-2a}$

5. a) Nem lesz zérus.

b) $b > 2a > 0$; $a > 0$ és $b < 0$; $0 > b > 2a$

c) $2a > b > 0$; $0 > 2a > b$; $b > 0$ és $a < 0$



9. Egyenletekkel megoldható feladatok I.

1. x : a kerékpártúra hossza km-ben

$$\frac{x}{4} + 6 + \left(\frac{3x}{4} - 6\right) \cdot \frac{1}{3} + 2 + 44 = x$$
$$x = 100$$

100 km hosszú volt a kerékpártúra.

2. A 3 testvér életkora legyen x, y, z ($x < y < z$).

$$\begin{array}{r} x + y + z = 40 \\ y = x + 3 \\ y = z - 4 \\ \hline x = 10; y = 13; z = 17 \end{array}$$

A testvérek 10, 13 és 17 évesek.

3. x : az apa kora

$$\begin{array}{r} x + (x - 8) = 60 \\ x = 34 \end{array}$$

34 éves az apa.

4. x : a gondolt szám

$$\begin{array}{r} 2(x + 4) - 8 = x \\ x = 0 \end{array}$$

5. x : az egyesek helyén álló számjegy

$$\begin{array}{r} (3x - 1) \cdot 10 + x = 10x + (3x - 1) + 27 \\ x = 2 \end{array}$$

A szám az 52.

6. x : összesen annyi forintja volt

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 0,8 \cdot 0,05 + x \cdot 0,15 \cdot 0,03 + x \cdot 0,05 \cdot 0,02 = 36\,400 \\ x \cdot 0,05 \cdot 0,91 = 36\,400 \\ x = 800\,000 \end{array}$$

800 000 forintja volt összesen.

Rejtvény: e : az erdőben lévő fák mennyisége, f : a kivágandó fenyőfák mennyisége

$$\begin{array}{r} e \cdot 0,99 - f = (e - f) \cdot 0,98 \\ e = 2f \end{array}$$

Az erdő felét ki akarják vágni.



10. Egyenletekkel megoldható feladatok II.

1. a : az elvégzendő munka mennyisége

Az egyik munkás teljesítménye $\frac{a}{24}$, a másiké $\frac{a}{30}$.

Közös teljesítményük $\frac{a}{24} + \frac{a}{30}$.

A közös munkához szükséges idő $\frac{a}{\frac{a}{24} + \frac{a}{30}} = \frac{40}{3}$.

13 óra 20 perc alatt végeznek együtt.

2. a : a kád űrtartalma

Az egyik csap teljesítménye $\frac{a}{20}$, a másiké $\frac{a}{15}$ és a lefolyóé $\frac{a}{16}$.

Együttes teljesítményük $\frac{a}{20} + \frac{a}{15} - \frac{a}{16}$.

A feltöltéshez szükséges idő $\frac{a}{\frac{a}{20} + \frac{a}{15} - \frac{a}{16}} = \frac{240}{13} = 18 + \frac{6}{13}$.

Körülbelül 18 óra 28 perc alatt telik meg.

3. x : a kikötők távolsága

y : a hajó sebessége állóvízben

$$y + 3 = \frac{2x}{7}$$

$$y - 3 = \frac{x}{5}$$

$$x = 70; y = 17$$

70 km a kikötők távolsága.

4. x : az agár által megtett út

A sebessége 3 m, az agaré 4m időegységenként.

$$\frac{x - 30}{3} = \frac{x}{4}$$
$$x = 120$$

120 métert kell megtennie.

5. x : az elpárologatott víz mennyisége

$$10 \cdot 0,4 = (10 - x) \cdot 0,6$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$\frac{10}{3}$ l vizet kell elpárologatni.



6. x : az eredeti ár

$$x \cdot 0,8 \cdot 1,2 = x - 100$$

$$x = 2500$$

2500 forintba került.

Rejtvény:

a) 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojás,
9 tyúk 3 nap alatt 9 tojás,
9 tyúk 9 nap alatt 27 tojás.

b) 1 tyúk 1 nap alatt $\frac{1}{3}$ tojás,
5 tyúk 1 nap alatt $\frac{5}{3}$ tojás,
5 tyúk 6 nap alatt 10 tojás.

c) 1 tyúk 1 nap alatt $\frac{1}{3}$ tojás,
1 tyúk 9 nap alatt 3 tojás,
7 tyúk 9 nap alatt 21 tojás.

11. Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek

1. a) $(1; 3)$

b) $(4; 2)$

c) $(1; 1)$

2. a) $(1; -1)$

b) $\left(\frac{24}{25}; \frac{16}{5}\right)$

c) $\left(\frac{5}{2}; -1\right)$

3. a) $\left(\frac{5}{6}; -\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{7}{13}; \frac{4}{13}\right)$

c) $\left(\frac{26}{5}; -\frac{1}{5}\right)$

4. a) $a \neq -4$

b) nincs ilyen a

c) $a = -4$

5. a) $a = -b$ és $b \neq \frac{2}{3}$

b) $a = -b = -\frac{2}{3}$

Rejtvény: Mindkét egyenlet egy-egy egyenest határoz meg a koordinátasíkon. Ha a értékét „kicsit” változtatjuk, akkor a hozzá tartozó egyenes meredeksége „kicsit” változik, de az y tengelyen vett metszéspont nem. Így a két egyenes metszéspontja, azaz az egyenletrendszer megoldása „kicsit” fog változni. Az állítás tehát igaz.



12. Egyenletrendszerekkel megoldható feladatok

1. $\frac{18 \cdot 0,46 + 12 \cdot 0,54}{30} = 0,492$

Akárhogy keverjük őket össze, 49,2%-os oldatunk lesz.

2. x : a villamos sebessége $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban mérve

y : a villamos követési ideje órában mérve

Egy irányban haladva két találkozás között a második villamosnak meg kell tennie a két villamos közötti távolságot ($x \cdot y$) és az ember által megtett utat. Ha szembe mennek, akkor az ember által megtett úttal kevesebbet kell megtennie. tehát

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \frac{1}{5} = x \cdot y + 4 \cdot \frac{1}{5} \\ x \cdot \frac{1}{15} = x \cdot y + 4 \cdot \frac{1}{15} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}}; y = \frac{1}{10} \text{ h} = 6 \text{ min.}$$

3. x : a tízes helyi értéken álló számjegy

y : az egyes helyi értéken álló számjegy

$$10x + y = 4(10y + x) + 3 \rightarrow x > y$$

$$10x + y = 11(x - y) + 5$$

$$x = 7; y = 1$$

A szám a 71.

4. Legyen $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$. Ekkor α nagyobb az egyik szögnél és kisebb a másiknál. Tegyük fel, hogy $\beta < \alpha < \gamma$. Így

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$\alpha + \gamma = 3\beta$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ; \beta = 45^\circ; \gamma = 75^\circ$$

13. Lineáris többismeretlenes egyenletrendszerek

1. a) $(-11; -6; -8)$

b) $(1; 0; 0)$

c) $\left(\frac{29}{37}; \frac{49}{37}; \frac{73}{37}\right)$

2. Nemnegatív tagok összege csak akkor 0, ha minden tag 0.

a) $(8; 5; 3)$

b) $\left(\frac{35}{26}; \frac{36}{13}; \frac{233}{52}\right)$

c) $(2; 3; 1)$



3. x : vízszintes útszakasz hossza
 y : emelkedő hossza oda felé
 z : lejtő hossza oda felé

$$\begin{aligned}\frac{x}{80} + \frac{y}{60} + \frac{z}{100} &= 5 \\ \frac{x}{80} + \frac{z}{60} + \frac{y}{100} &= \frac{79}{15} \\ \hline x + y + z &= 400\end{aligned}$$

$$x = 240; y = 60; z = 100$$

Odafelé 240 km vízszintes, 60 km emelkedő és 100 km lejtő.

4. Játék előtt: A: x B: y C: z
 1. játék után: A: $x - y - z$ B: $2y$ C: $2z$
 2. játék után: A: $2(x - y - z)$ B: $2y - (x - y - z + 2z) = 3y - x - z$ C: $4z$
 3. játék után: A: $4(x - y - z)$ B: $2(3y - x - z)$ C: $4z - (2x - 2y - 2z + 3y - x - z) = 7z - x - y$

$$\begin{aligned}4x - 4y - 4z &= 100 \\ 6y - 2x - 2z &= 100 \\ \hline 7z - x - y &= 100 \\ \hline x = \frac{325}{2}; y = \frac{175}{2}; z &= 50\end{aligned}$$

5. a, b, c : a szakaszok hossza cm-ben

$$\begin{aligned}a + b &= 42 \\ b + c &= 28 \\ \hline a + c &= 20\end{aligned}$$

$$a = 17; b = 25; c = 3$$

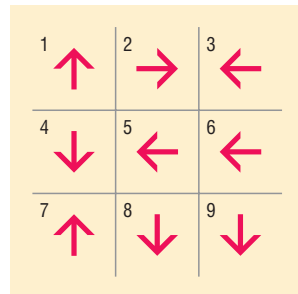
Mivel $a + c < b$, nem alkothatnak háromszöget.



Egybevágósági transzformációk

2. Tengelyes tükrözés a síkban

1. Számozzuk meg a nyilakat!
Tengelyesen szimmetrikus: 1–4; 2–3; 3–6; 4–7; 8–9.
2. PP' szakasz felező merőlegese.
3. a) $A'(-1; -1)$; $B'(4; -3)$; $C'(-3; -5)$
b) $A'(1; 1)$; $B'(-4; 3)$; $C'(3; 5)$
4. $A(-3; 3)$; $B(3; 1)$; $C(4; 8)$
5. 1. A kör középpontjából körözünk olyan nagy sugárral, hogy két helyen metsze az egyenest.
2. Ezen sugárral mindkét metszéspontból körözünk az egyenes másik oldalán, hogy az ívek metszék egymást.
3. A kapott pont a kör tükörképének középpontja, így az adott sugárral megrajzoljuk a kör képét.
6. A középpontok által meghatározott szakasz felező merőlegese a keresett egyenes.
7. Tükrözzük c egyenest b -re. Ahol a kép metszi az a egyenest ott van a keresett pont.
8. A P''' pont az AB egyenesére illeszkedik, hiszen a szögfelezőre való tükrözés oldalegyenest oldalegyenesbe visz.
9. Mindkét csúcsot tükrözzük a szögfelezőre. Az egy félsíkban lévő pontok egy-egy oldalegyenest határoznak meg, melyeknek a szögfelezőn kell metszeniük egymást.
Ha a csúcsok szimmetrikusak a szögfelezőre, akkor a háromszög egyenlő szárú, és a harmadik csúcs a szögfelező egyenes bármely olyan pontja lehet, amely nem illeszkedik az adott oldalra.
10. Tükrözzük A -t e -re. $A'B \cap e$ a keresett pont.
11. Mivel az eredeti csúcsoknál lévő szög az új alakzatban 180° , az eredeti háromszög mindhárom szögének 60° -nak kell lennie. Az eredeti háromszög tehát szabályos.
Rejtvény: Attól függ, hogy a számlap számozása azonos vagy ellentétes irányú.
(Ha azonos a számozás iránya, akkor 6 óra múlva; ha ellentétes, akkor mindig ugyanazt az időt mutatják.)



3. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok

1. a) hamis b) igaz c) hamis d) igaz e) hamis f) igaz
g) hamis h) igaz i) igaz j) hamis k) hamis
2. Tükrözzük a harmadik csúcsot a szimmetriatengelyre.

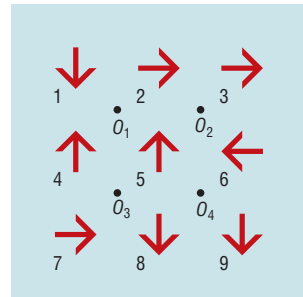


3. Mindkét csúcst tükrözzük a szimmetriatengelyre.
4. Tükrözzük az egyik egyenest a tengelyre. Ahol a kép metszi a másik egyenest, az a deltoid egyik csúcsa, melyet tükrözve a tengelyre, a negyedik csúcst is megkapjuk. Ha a tükrözésnél a kép egybeesik a másik egyenessel, akkor bármelyik pontja lehet a deltoid harmadik csúcsa.
5. A két pont által meghatározott oldalegyenes két pontban metszi a tengelyeket. Ezek csúcspontok. Ezeket tükrözve a tengelyekre, megkapjuk a másik két csúcspontot is. Ez mindig megszerkeszthető.
6. Egyik lehetőség: $(1; 1)$; $(-1; 1)$; $(-1; -1)$; $(1; -1)$.
Másik lehetőség: $(\sqrt{2}; 0)$; $(0; \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}; 0)$; $(0; -\sqrt{2})$.
7. Mindkét tengelynek egy-egy csúcsra kell illeszkednie. A tengelyekre illeszkedő csúcsokból induló oldalak egymásra szimmetrikusak, azaz egyenlőek. Így mindhárom oldal egyenlő, tehát van harmadik szimmetriatengely.

4. Középpontos tükrözés a síkban

1. Számozzuk meg a nyilakat!
Középpontosan szimmetrikus: 1–5; 2–6; 4–8; 5–9.
2. Az AB szakasz felezőpontja a tükrözés középpontja B képe A lesz.
3. A középpontok által meghatározott szakasz felezőpontja a tükrözés középpontja.
4. a) $A'(1; -1)$; $B'(-4; -3)$; $C'(3; -5)$
b) $A'(3; -1)$; $B'(-2; -3)$; $C'(5; -5)$
c) $A'(5; -5)$; $B'(0; -7)$; $C'(7; -9)$
5. $A(-3; 1)$; $B'(-7; 1)$; $C'(-14; 0)$
6. a) 2 cm oldalú szabályos hatszög. b) 2 cm oldalú 12-szög, hatágú csillag.
7. Tükrözzük az egyik egyenest a pontra. Ahol a kép metszi a másik egyenest, ott lesz az egyik pont, melyet tükrözve az adott pontra, megkapjuk a másik pontot is.
8. Egy háromszöget kapunk, hisz az eredeti háromszög csúcsainál egymás mellé kerül a három belső szög, melyek összege 180° .
9. Az egyik ilyen szelő a két metszéspont által meghatározott közös szelő. A másik szelő megszerkesztéséhez tükrözzük az egyik metszéspontra az egyik kört. A kép és a másik kör metszéspontja a kiválasztott metszésponttal meghatározzák a keresett szelőt.
10. Tükrözzük az egyik szögcsúcsát a P -re. Az a pont, ahol a kép metszi a másik szarát, a P -vel meghatározza a keresett egyenest.

Rejtvény: Az első érmét az asztal középpontjába tegye, majd mindig az ellenfél érméjének ezen pontra való tükröképére tegye az érméit.





5. Középpontosan szimmetrikus alakzatok

1. a) hamis b) igaz c) hamis d) igaz e) igaz f) igaz
g) hamis h) igaz i) igaz

2. A két csúcsot tükrözzük az átlók metszéspontjára.

3. $C(2; -5)$; $D(4; 2)$

4. Paralelogrammát, hiszen átlói felezik egymást.

5. Tükrözzük O -ra a szög csúcsát, így a paralelogramma másik csúcsát kapjuk. Ezen keresztül húzzunk párhuzamosokat a szög száraival, melyek a paralelogramma oldalegyenesei. Ezek a szögcsúcsokból kimetszik a hiányzó két csúcsot.

6. a) 72° ; 108°

b) 80° ; 100°

c) 54° ; 126°

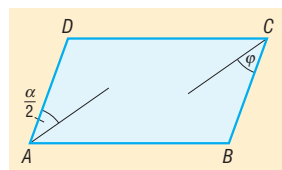
d) $p \cdot \frac{180^\circ}{p+q}$; $q \cdot \frac{180^\circ}{p+q}$

7. Húzzunk α szögfelezőjével párhuzamost C -n keresztül, így

kapjuk φ szöget. φ és $\frac{\alpha}{2}$ váltószögek így egyenlőek. Tehát

φ egyik szára szögfelező. Mivel egy szögnek egy és csak egy szögfelezője van, a két szögfelező párhuzamos.

Ha a két szögfelező egy egyenesbe esik, akkor a paralelogrammát két olyan háromszögre bontják, melyekben két szög egyenlő, azaz egyenlő szárúak. Tehát a paralelogramma rombusz.



8. Nem igaz, mert az átlók nem feltétlenül lennének egyenlő hosszúak, csak biztosan feleznék egymást.

Rejtvény: Van, például egyenes, sík.

6. A középpontos tükrözés alkalmazásai

1. a) $\frac{3}{2}$ cm; 2 cm; $\frac{5}{2}$ cm

b) 3 dm; $\frac{7}{2}$ dm; 5 dm

c) 3,6 m; 205 cm; 25 dm

d) nem alkotnak háromszöget, hiszen $12 = 7,2 + 4,8$

2. a) 6 cm

b) 11 dm

c) 21,25 cm

d) 47 mm

3. Az átfogó hossza a vele párhuzamos középvonal hosszának kétszerese, azaz 6 cm.

Vegyük fel az átfogót, és rajzoljunk vele párhuzamos egyenest 2 cm távolságban (két párhuzamos egyenes). Rajzoljuk meg az átfogó Thalész-körét. Ez a párhuzamosokból kimetszi a háromszög harmadik csúcsát. Így 4 db egybevágó háromszöget kapunk.

4. a) $\frac{5}{2}$ cm

b) $\frac{13}{2}$ dm

c) $\frac{37}{2}$ mm

d) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$



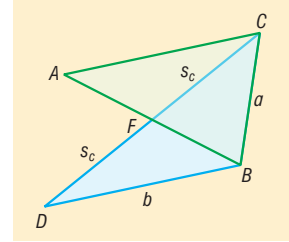
5. a) 6 cm b) 9 dm c) 18,45 m d) $\frac{3}{2}d$

6. Paralelogrammát határoz meg.

- a) 10 cm; 8 cm b) 124 cm; 41 cm c) $2x; y$

7. Szerkesszük meg az $a, b, 2s_c$ oldalú háromszöget.

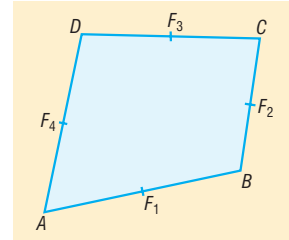
Tükrözzük B -t F -re. Az így kapott pont a keresett háromszög harmadik csúcsa (A).



8. A felezőpontokat összekötő szakasz a két szomszédos oldal által meghatározott háromszög középvonala, melyről tudjuk, hogy párhuzamos a harmadik oldallal, mely a négyszög egyik átlója.

9. A 8. feladat alapján $F_1F_2 \parallel AC \parallel F_3F_4$ és $F_1F_2 = \frac{AC}{2} = F_3F_4$.

Mivel az $F_1F_2F_3F_4$ négyszögben két oldal hossza egyenlő és párhuzamosak, a négyszög paralelogramma.



10. A 9. feladat alapján a középvonalak egy paralelogramma átlói, melyekről tudjuk, hogy felezik egymást.

11. Ha a középvonalak egyenlő hosszúak, akkor az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogramma téglalap, tehát a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

12. A körök páronként a harmadik oldalon, a magasság talppontjában metszik egymást. Így a szelők metszéspontja a magasságpont.

13. a) Az egyik oldal felezőpontjára tükrözve a háromszöget, mindig kapunk egy olyan háromszöget, melynek oldalai az egy csúcsból induló háromszögoldalak és a súlyvonal kétszerese. Ebben a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$s_c \leq \frac{a+b}{2}; s_b \leq \frac{a+c}{2}; s_a \leq \frac{b+c}{2}.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy $s_a + s_b + s_c \leq a + b + c$.

b) Tükrözzük a háromszög csúcsait mindhárom oldalfelező pontra. Így kapjuk $A'B'C'$ háromszöget.

Ebben $SA' = 2s_a - \frac{2}{3}s_a = \frac{4}{3}s_a$. Hasonlóan $SC' = \frac{4}{3}s_c$.

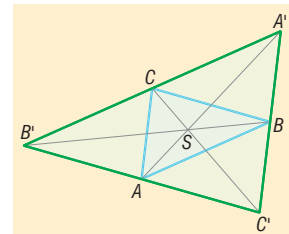
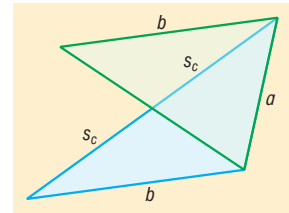
$SA'C'$ háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján

$$\frac{4}{3}s_c + \frac{4}{3}s_a \geq 2b.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{4}{3}s_a + \frac{4}{3}s_b \geq 2c,$$

$$\frac{4}{3}s_b + \frac{4}{3}s_c \geq 2a.$$





Ezeket összeadva, kapjuk:

$$\frac{8}{3}(s_a + s_b + s_c) \geq 2(a + b + c).$$

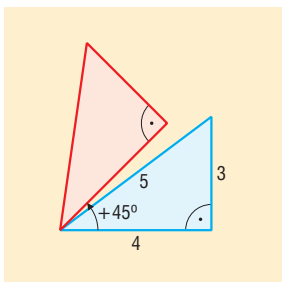
Innen

$$s_a + s_b + s_c \geq \frac{3}{4}(a + b + c).$$

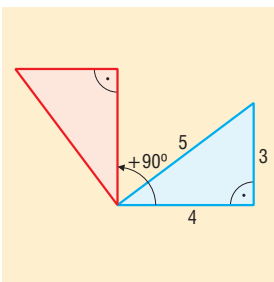
Ezzel az állítást beláttuk.

7. Pont körüli forgatás a síkban

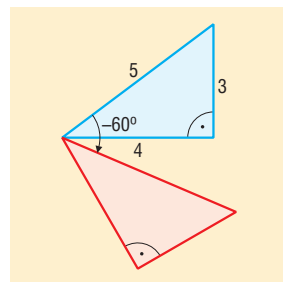
1. a)



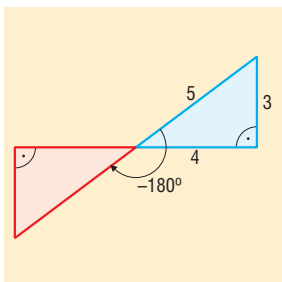
b)



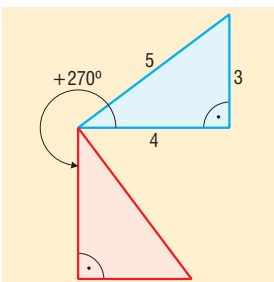
c)



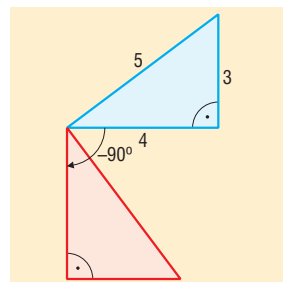
d)



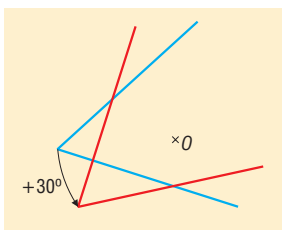
e)



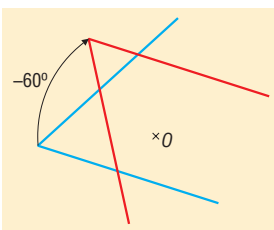
f)



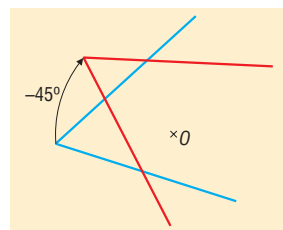
2. a)



b)



c)



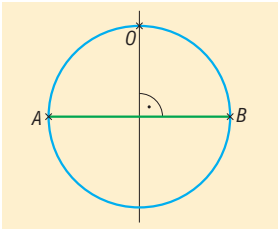
3. Az AB szakasz felező merőlegesének pontjai.

4. Az egyik szakasz egyik végpontját összekötjük a másik szakasz egyik végpontjával, majd a megmaradt végpontokat is összekötjük. Az így kapott szakaszok felező merőlegesének metszéspontja lesz a forgatás középpontja. Két ilyen középpont kapható.

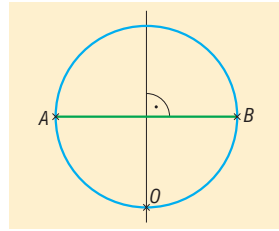


5. Az AB szakasz adott szöghöz tartozó megfelelő látószög körívének és a szakasz felező merőlegeseinek metszéspontja a forgatás középpontja.

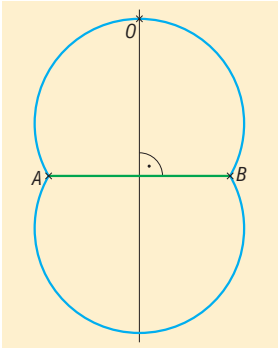
a)



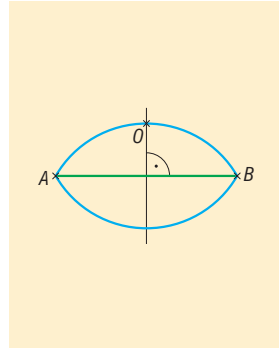
b)



c)



d)



6. a) $A'(-1; -1)$; $B'(-3; 4)$; $C'(-5; -3)$

- b) $A'(1; 1)$; $B'(3; -4)$; $C'(5; 3)$

- c) $A'(1; -1)$; $B'(-4; -3)$; $C'(3; -5)$

- d) $A'(1; 1)$; $B'(3; -4)$; $C'(5; 3)$

7. a) $(-1; 1)$ vagy $(1; -1)$

- b) $(4; -3)$ vagy $(-4; 3)$

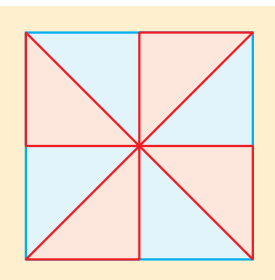
- c) $(1; 4)$ vagy $(-1; -4)$

- d) $(8; -3)$ vagy $(-8; 3)$

8. Forgassuk el az egyik egyenest 60° -kal. Ahol a kép metszi a másik egyenest, ott lesz a háromszög egy másik csúcsa. Ezt a pontot az előzővel ellentétes irányban forgatva 60° -kal kapjuk a harmadik csúcspontot. Két megfelelő háromszöget kaphatunk.

9. Az átlók metszéspontja körül 3-szor forgassuk el a csúcspontot 90° - 90° -kal.

10.





8. A pont körüli forgatás alkalmazásai I.

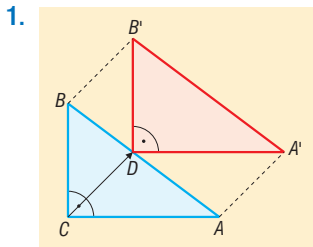
1. a) 180° b) 120° c) 270° d) $\frac{720^\circ}{7}$
2. a) 90° b) 60° c) 144° d) 200°
3. a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ d) $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\frac{11\pi}{24}$
 g) $\frac{37\pi}{28}$ h) $-\frac{7\pi}{12}$
4. a) 60° b) 240° c) 40° d) 75° e) 210°
 f) $\frac{360^\circ}{\pi} \approx 114,6^\circ$ g) -30° h) 900°
5. a) Nagymutató: π m; kismutató: 5π cm.
 b) Nagymutató: 2π m; kismutató: 10π cm.
 c) Nagymutató: 48π m; kismutató: 240π cm.
 d) Nagymutató: 672π m; kismutató: 3360π cm.
 e) Nagymutató: 4032π m; kismutató: 20160π cm.
 f) Nagymutató: $87,6\pi$ km; kismutató: $4,38\pi$ km.
6. a) $\pi \text{ cm}^2$; $(4 + \pi) \text{ cm}$ b) $\frac{4\pi}{3} \text{ cm}^2$; $\left(\frac{4\pi}{3} + 4\right) \text{ cm}$
 c) $\frac{7\pi}{6} \text{ cm}^2$; $\left(\frac{7\pi}{6} + 4\right) \text{ cm}$ d) $\frac{16\pi}{9} \text{ cm}^2$; $\left(\frac{16\pi}{9} + 4\right) \text{ cm}$
7. a) A hulladék: $\frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ m}^2$; $\sim 59\%$. b) A hulladék: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{ m}^2$; $\sim 36\%$.
 c) A hulladék: $\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} \text{ m}^2$; $\sim 17\%$. d) A hulladék: $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \text{ m}^2$; $\sim 4,5\%$.
8. a) $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\% \sim 21,5\%$ b) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\% \sim 57\%$
 c) $\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)\% \sim 60,7\%$ d) $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\% \sim 57\%$



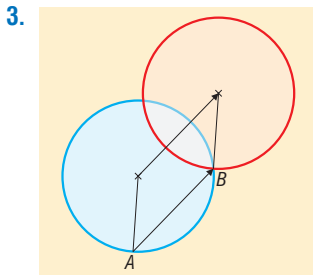
9. A pont körüli forgatás alkalmazásai II.

- A forgatás szöge: 120° ; 240° .
 - A forgatás szöge: 90° ; 180° ; 270° .
 - A forgatás szöge: 72° ; 144° ; 216° ; 288° .
 - A forgatás szöge: 30° ; 60° ; 90° ; 120° ; 150° ; 180° ; 210° ; 240° ; 270° ; 300° ; 330° .
Súlypont körül forgatunk.
- 3 tengelyes tükrözés, az oldalfelező merőlegesekre.
Középpont körüli 120° , 240° -os forgatás.
 - 2 tengelyes tükrözés, az átlókra.
2 tengelyes tükrözés, az oldalfelező merőlegesekre.
Középpont körüli 90° , 180° , 270° -os forgatás.
Középpontra való tükrözés.
- igaz b) hamis c) hamis d) igaz e) igaz f) igaz
 - g) hamis h) hamis
- A súlypont körül forgassuk el a csúcsot kétszer, 120° -kal.
- A két csúccsal szerkesztünk egy szabályos háromszöget, majd az új csúcs körül elforgatjuk egymás után 5-ször 60° -kal a háromszöget.

10. Párhuzamos eltolás, vektorok



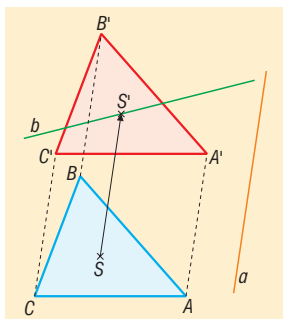
2. $A - C - F$; $D - E$





4. Nem oldható meg, ha a két egyenes párhuzamos.

a)

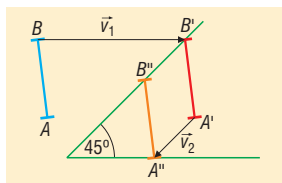


$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{SS'}$$

b) Ugyanígy.

5. a) igaz b) hamis c) igaz d) hamis e) igaz

6.



$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

7. $\vec{a} = \vec{e} = -\vec{h}$; $\vec{b} = -\vec{f}$; $\vec{i} = -\vec{j} = \vec{d} = -\vec{c}$

8. A B pontot toljuk el a folyó felé a folyóra merőleges és a folyó szélességével egyenlő nagyságú vektorral. Ahol az AB' egyenes metszi a folyó A felőli partvonalát, ott kell épülnie a hídnak.

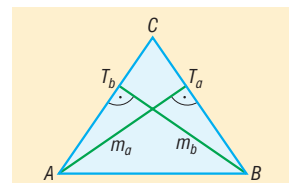
11. Műveletek vektorokkal

1. a) $\overrightarrow{AC}$ b) $2\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{GB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{DF}$
3. a) (5; 3) b) (5; 2) c) (7; 7) d) (11; 1) e) (2; 0) f) $(4+a; 3+b)$
4. a) (2; -4) b) (1; -3) c) (6; -4) d) (-1; -2) e) (0; -12) f) $(p+2; q-5)$
5. a) $\vec{v}(5; 0)$ b) $\vec{v}(-9; -2)$ c) $\vec{v}(2; 2)$
6. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$



12. Alakzatok egybevágósága

1. a) $a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$ alapján oldalaik egyenlőek, tehát egybevágók.
 b) Ugyanaz, mint a) mivel $s = m$.
 c) Mivel $m = \frac{3}{2}R$, az a) alapján $a = \frac{3R}{\sqrt{3}}$ és így az oldalaik egyenlőek, ha a sugarak egyenlőek
2. a) A befogók az átfogó $\sqrt{2}$ -ed részei, így ha az átfogók egyenlőek, akkor a befogók is. Vagy egy-egy oldalban és a rajta fekvő két szögben (45° ; 45°) egyenlőek.
 b) Egy-egy oldalban és a rajta fekvő két szögben (90° ; 45°) egyenlőek.
 c) Ugyanaz, mint a) hisz a körülírt kör sugara az átfogó fele.
3. a) Két-két oldalban és a közbezárt szögben egyenlőek.
 b) A szemközti szög legyen α ; egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két szögük (90° ; $90^\circ - \alpha$) egyenlő.
 c) Kössük össze az átfogó felezőpontját a szemközti csúccsal. Mivel ez a köréírt kör sugara egyenlő az átfogó felével. A két háromszögben kapott, a sugár és a magasság által meghatározott derékszögű háromszögek egybevágók (két-két oldalban és a nagyobbikkal szemközti szögben egyenlőek). Ebből adódik, hogy ezen sugarak által meghatározott két-két részében, a két eredeti derékszögű háromszögnél, két oldalban és a közbezárt szögben egyenlőek, így egybevágók.
4. a) Legyen a szárszög α , ekkor egy-egy oldaluk és a rajta fekvő két-két szögük $\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ egyenlőek.
 b) Legyen az alap a , így $b = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m_a^2}$, tehát ha az alap és a hozzá tartozó magasságuk egyenlő, akkor a szárai is egyenlőek.
 c) Legyen az alapon fekvő szög β , a magasság két derékszögű háromszögre vágja mindkét háromszöget. Ezek páronként egybevágók, hisz egy oldaluk (magasság) és a rajta fekvő két-két szögük (90° ; $90^\circ - \beta$) egyenlő. Így a két háromszög is egybevágó.
5. Ha két szögük egyenlő, akkor mindhárom szögük egyenlő. Az adott oldal azonban lehet alap vagy szár is, így nem egyértelmű a megadás, a két háromszög nem feltétlenül egybevágó.
6. Ha a két szár egybevágó, akkor azok csak háromszögek lehetnek. Tehát a szelő egyenes egy csúcson halad át és egy oldalt metsz. A két keletkezett háromszögben, az eredetileg egymással érintkező két oldallal szemközti szögek egyenlőek az egybevágóság miatt. Így az eredeti háromszögben van két egyenlő szög, tehát a háromszög egyenlőszárú.
7. Legyen a két magasság m_a és m_b . Az AT_aC_Δ és a BT_bC_Δ egybevágó, mivel egy-egy oldaluk ($m_a = m_b$) és a rajta fekvő két szögük (90° ; $90^\circ - \gamma$) egyenlő. Tehát $a = b$, azaz a háromszög egyenlőszárú.
 Másként: A területképlet alapján $\frac{a \cdot m_a}{b} = \frac{b \cdot m_b}{2}$, és $m_a = m_b$, tehát $a = b$.





8. a) Két átlójuk egyenlő;
egy oldaluk és egy szögük egyenlő;
egy oldal és egy átló egyenlő;
egy oldal és magasság egyenlő.
- b) Két átlójuk és egy oldaluk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy átlójuk egyenlő.
- c) Két átlójuk és egy oldaluk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy átlójuk egyenlő;
két különböző oldaluk és egy szögük egyenlő.
- d) Magasságuk, két száruk és egy alapjuk egyenlő;
magasságuk, két alapjuk és egy száruk egyenlő;
egy alapjuk, magasságuk és két átlójuk egyenlő.
9. Az A csúcs körüli -90° -os forgatásnál $E' = C$ és $B' = G$. Így $EAB_\Delta \cong CAG_\Delta$.



Statisztika

1. Az adatok ábrázolása

Rejtvény: A c) válasz a helyes, és azt is jelölte a nézők többsége.

2. Az adatok jellemzése

1. $Mo = 15$; $\bar{Y} = 22$; $Me = 15$

2. $Mo = 19$; $\bar{Y} = 19,6$; $Me = 19$

3. a) $\bar{Y} = 150\,000$

b) $\bar{Y}_{n\sigma} = 150\,000$; $\bar{Y}_{\text{fi}} = 150\,000$

c) $Me_{n\sigma} = 100\,000$; $Me_{\text{fi}} = 150\,000$

d) Nő hivatkozhat a móduszra, mediánra. Az igazgató az átlagra.

4. Módusszal.

5. 710 pont az összeg.

6. $\frac{4 \cdot 75 + 90}{5} = 78$ az új átlag.

7. Összesen 800 pontot kellett elérnie, de csak 790 pontot ért el. Még 10 pont hiányzik.

8. $\frac{25 \cdot 82 + 27 \cdot 69}{25 + 27} = 75,25$ az átlag.

9. $\frac{95 + 97 + 91 + 101}{4} + 1 = \frac{95 + 97 + 91 + 101 + x}{5}$
 $x = 101$

101 pontos lett az ötödik.

10. a) hamis b) hamis c) hamis d) igaz e) hamis

Mo : 5-tel nő, d) igaz; Me : 5-tel nő, d) igaz.

11. a) hamis b) hamis c) igaz d) hamis e) hamis

Mo : c) igaz; Me : c) igaz.

12. A b) hamis. Bori a legfiatalabb.

13. 8 kg-mal nehezebb.

14. n : a megkérdezettek száma

$$56n - 69 = (n - 1) \cdot 55$$
$$n = 13$$



13 főt kérdeztek meg. Akkor jöhet szóba a legnagyobb szám, ha 11 fő egy könyvet sem olvasott, 1 fő olvasott 68 könyvet és 1 fő a többi könyvet, $12 \cdot 55 = 660$. 660 könyv lehet a legnagyobb válaszul adott szám.

15. Smith átlaga jobb.

Rejtvény: Nem, a középső fiúmagassága a medián és a nála magassabbak közel olyan magasak, mint ő, de a kisebbek jóval kisebbek. Így az átlagmagasság kisebb lesz, mint a medián.